

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_232004

UNIVERSAL
LIBRARY

OSMANIA UNIVERSITY LIBRARY

Call No.

9
D12

Accession No.

63225

Author

25-9

Title

This book should be returned on or before the date
last marked below.

توانا بود، سرکه دانا بود

وزارت فرهنگ

کتاب جبر

برای سال دوم دبیرستانها

بها در تمام کشور ۱۶ ریال



حق چاپ محفوظ

۱۳۲۴

بنگاه علمی

فصل اول

بسم الله الرحمن الرحيم

حرفها و نشانه ها و دستورهای هجری

۱- در علم حساب عدد برای بخش یک چندی (کیت) است نسبت به یک (واحد) آن چندی
مثلاً هرگاه بگوئیم در ازای فلان پارچه ۷ متر است عدد ۷ مینماید که این در از ۷ برابر یک
در از این متر است و همچنین هرگاه بگوئیم وزن این روغن $۲\frac{۳}{۴}$ کیلو است عدد $۲\frac{۳}{۴}$ مینماید
که این وزن ۲ یک و $\frac{۳}{۴}$ یک وزن را دربردارد.

۲- چنانکه میدانیم در مسئله های حساب عددی مانده های بالا ۷ و $\frac{۳}{۴}$ بکار
میروند. مانند مسئله زیر:

فردا کارگری در روز ۱۲ ریال است پس از ۵ روز چند ریال میبرد؟
و نیز در بهره کاری (تربج) مسئله های در زوی عددی مختلف که نایش سر است
و زمان و نرخ و سود است طرح میشود مانند مسئله زیر:

مطلوبت سود ۲۵۰ ریال سرمایه از قرار نرخ ۵٪ در مدت دو سال که پس از آنجا

مختصری نتایج میشود:

$$\frac{۲۵۰ \times ۶ \times ۲}{۱۰۰} = ۳۰ \text{ ریال}$$

و میدانیم که این مسئله و مسئله های مانند آنرا بوسیله دستور

$$ن = \frac{\alpha \times \epsilon \times t}{۱۰۰}$$

حل میکردیم که در آن ن بجای شود و α بجای سرمایه و ϵ بجای نرخ و t بجای زمان گذر
شده و معنای آن این است:

مؤ و مساوی است با سرمایه ضرب در نرخ ضرب در زمان تقسیم بر ۱۰۰
از روی این دستور نه تنها مسئله بالا را میتوان حل نمود بلکه هر مسئله ای که مانند آن باشد از روی

این دستور حل میشود چنانکه اگر سرمایه ۱۲۰ ریال و نرخ ۹٪ و زمان ۵ سال باشد از روی دستور
نمود چنین میشود

$$= \frac{\alpha \times \epsilon \times t}{۱۰۰} = \frac{۱۲۰ \times ۹ \times ۵}{۱۰۰} = ۵۴ \text{ ریال}$$

در مسئله اول α مساوی ۲۵۰ در مسئله دوم مساوی ۱۲۰ می باشد و در مسئله ۳

ممکن است بجای سرمایه های دیگر بکار رود همچنین است حرفهای دیگر که در دستور را
بنابرین از بکار بردن حرفها در مسئله ها دستور ثانی مانند دستور اول بدست میآید
این دستور تا که رابطه ثانی هستند شامل حرف و عدد و نشانه (علامت) فحاسبه ساده شده
باسانی حل میگردد.

مثال - میدانیم مساحت مستطیل مساوی حاصل ضرب قاعده و ارتفاع آنست

اندازه قاعده را از روی یک درازا مثلثا سنجیم تر به α و اندازه ارتفاع را از روی همان یک

به کمک مساحت را بحسب یک مساحت مثلث سائیم مرتب، به S بنامیم این دستور که $S = ax$ نتیجه میشود که از روی آن میتوان مساحت مثلثی را بدست آورد.

۳- اگر آنچه گفته شد معلوم میشود هرگاه در مسئله ای بجای عدد با حرف گذاشته شود آن مسئله صورت کلی پیدا میکند و از حل آن میتوان مسئله های زیادی مانند آن را حل نمود و منظور غده علم حیر و تعجب نیز همین است یعنی ساده نمودن محاسبه ها و عمومیت دادن کل مسئله ها بواسطه بکار بردن حرف ها و نشانه ها

نشانه ها برای آسان نمودن حل مسئله و حرفها برای عمومیت دادن محاسبه ها بکار میروند مثلاً به- حرفها بیشتر در جبر حرفهای اول الفبا، لاتین a و b و c و غیره را برای نمایش درازا داشته (معلوم) و حرفهای آخر را x و y و z و غیره برای نمایش چندیمای بخوبی که این در نزد

۲- که بخوبی است چند مقدار مانند هم را بنامند آنها را با یک حرف نموده اختلافشان را میروند. ن زیری در بالائی سمت راست و یا شماره ای در زیر یکی سمت راست میسند a و a و a ... (بخوانند a زیر یک و a زیر دو و غیره) و یا a و a (بخوانند a زیر یک و a زیر دو و غیره).

و زمانیکه نشانه ها (علامت) نشانه ها معلوم میکنند علمایا را بطه ای که باید بین عدد ها و عبارات قرار باشد بهترین آنها از این قرارند:

الف- نشانه های مخصوص چهار عمل اصلی- همان نشانه است که در حساب

هم بکار میسبزند

+ علامت افزودن عددی بر عدد دیگر است مانند $a + b$ و $2 + 5$ و $c + 12$

- نمایش کاستن عددی از عدد دیگر است مانند $a - b$ و $5 - 2$ و $x - 1$

\times بنماید که باید دو عدد در هم ضرب شوند مانند $a \times b$ و 2×5

حاصل ضرب دو عدد a و b را چنین نیز بنویسند $a \cdot b$ یا ab

مانند $a \cdot x$ و xy

: یا - علامت تقسیم کردن عددی بر عدد دیگر است

مانند $a : b$ یا $\frac{a}{b}$ و $\frac{2}{3}$ و $\frac{12}{3}$

ب- علامتهای مقایسه:

= نمایش مساوی بودن دو مقدار است مانند $a = b$ و $2 = 2$

\neq علامت اختلاف دو مقدار است مانند

$5 \neq 7$ و $a + 7 \neq a + 1$ و $4 + 2 \neq 10$

< یا > برای اینکه بنویسند عددی کوچکتر از عدد دیگر یا بزرگتر از آنست علامت < یا > بکار میسبزند چنانکه $a < b$ یا $a > b$ هر دو بنماید که عدد a بزرگتر از b میباشد

مانند $3 < 4$ و $7 > 6$

< یا > این دو علامت را وقتی بکار میبریم که نخواهیم بنویسیم عدد اقل یا اکثر عددی مانند چه مساوی عددی مانند a است مثلاً $a < b$ بنماید که عدد a بزرگتر از b میباشد

کم مساوی با آن میسب باشد و همین رابطه میباید که گوییم از α و یا اکثر مساوی با آنست

ج- پراسترنه - وقتی مقدار ثانی باشد نه های چهار عمل اصلی در داخل پراسترنه (یا

گروهه) [و یا آکلاژ] { فته اگر گرفته باشند حکم مقدار واحد پیدا میکنند و این پراسترنه

حاصل تمام عملهای بین این مقدار را میبایند مثلاً $(3-5) + \alpha$ میباید که باید بر به حال

پراسترنه یعنی ۲ را فته دود.

یادآور می - برای حساب کردن هر عبارتی که در آن جمع و تفریق و ضرب و تقسیم

باشد باید نخست عمل های ضرب و تقسیم را برتری که نوشته شده انجام داده سپس جمع و تفریق

$$\text{مثلاً} \quad 27 - 11 : 6 \times 2 + 5 \times 3 =$$

$$27 - 3 \times 2 + 15 =$$

$$27 - 6 + 15 = 26$$

بنابرین عبارت $7 + 2 \times 8 - 5$ یا $(7 + 2) \times (8 - 5)$

تفاوت کلی دارد چه

$$7 + 2 \times 8 - 5 = 7 + 16 - 5 = 18$$

$$(7 + 2) \times (8 - 5) = 9 \times 3 = 27$$

تمرین - این عبارت ها را حساب کنید

$$38 : 6 - 4(7 - 2) : 10 + 5(4 + 3 \times 2)$$

$$۶ : ۲ (۵ - ۲) - ۲ : ۴ : ۲۶$$

[] - وقتی بخوانند حاصل علمای چند پرانتز را بنویسند آنها را در داخل کرده []

قرار میدهند.

چنانکه عبارت $۳ \times [۱ - (۹ - ۵)]$ معلوم میکنید که باید عدد ۳ را در حاصل کرده ضرب نمود. و حاصل کرده اینطور بدست میاید که از عدد ۸ حاصل پرانتز یعنی ۴ را کم کنیم بنا برین حاصل کرده مساوی ۴ و عبارت بالاساوی ۱۲ میشود.

{ } - هرگاه مقصود نمایش حاصل علمای چند کرده باشد آنها را در داخل علامت اکلاود

{ } قرار میدهند.

چنانکه از عبارت $\{۷ - (۹ - ۵) [۷ - ۲] - ۱۵\}$ معلوم میشود که باید از عدد ۱۷ حاصل اکلاود را کاست. برای محاسبه اکلاود حاصل کرده یعنی ۳ را در ۲ ضرب بنماییم و حاصل آن یعنی ۶ را از ۱۵ می‌کاهیم بنا برین حاصل اکلاود ۹ و عبارت بالاساوی ۸ میشود.

پرسش های ساده شفاهی

۱- عبارتهای زیر را بنویسند

$$۵ - ۱ - ۵ = ۷ - ۲ ; x : ۲ ; \alpha \times ۵ ; ۶ - ۶$$

$$۲x - 7 = ۱۸ ; d = ۲e + ۳ ; v = \frac{3}{4} \pi R^2$$

۲- در بریک از عبارتهای پایین چه عملی باید کرد؟

$$۲a - xy + ۶$$

$$\frac{x-2}{2}$$

$$\frac{x}{a} - 5(x+y) \quad (a+b)(a-b)$$

$$: [\alpha - (2x+5)]$$

۲- مقصود برکت از رابطه های زیر را بیان کنید

$$2 < 2a \quad x > 2 \quad 2x-5 = ab$$

$$\alpha - 2b \neq 2 \quad y > \alpha : 5 \quad ab < \frac{1}{3}$$

۴- حاصل برکت از عبارتهای زیر را بنویسید

$$2(2+5) \quad 5(9-2) : 2$$

$$(2+2)(9-2) \quad (5-1) : (6-4)$$

$$\sqrt{(2+5)(9-2)} \quad \sqrt{21-2} : 5$$

۵- مقدار عددی عبارت های زیر را حساب کنید

$$4h^2 \quad \text{وقتی که } h = 4 \quad \text{یادداشت کنید} \quad h = 2 \quad h \text{ باشد}$$

$$ab^2 \cdot a = 2 \quad , \quad b = 5 \quad \text{باشد}$$

$$(m+n)^2 \cdot m = 9 \quad , \quad n = 4 \quad \text{باشد}$$

$$(a-b)^2 \cdot a = 4 \quad , \quad b = 1 \quad \text{باشد}$$

$$\sqrt{n} - x \quad , \quad n = 25 \quad x = 2 \quad \text{باشد}$$

۶- در مثلثی S نایب مساحت و α قاعده و h ارتفاع دارد برآنت این رابطه را

$$S = \frac{1}{2} \alpha h$$

توضیح دهید

۷- در مستطیلی S نمایش مساحت و هر نصف محیط α و b ضلع های آن، میباشد معنای

این دو رابطه چیست؟

$$S = \alpha b$$

$$2\pi = 2(\alpha + b)$$

۸- V حجم کره و R شعاع آنست از $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ چه میفهمید؟

۹- مجموع دو عدد α و ۳ را نمایش دهید.

۱۰- مجموع دو عدد α و b را نمایش دهید.

۱۱- تفاضل دو عدد α و b را نمایش دهید.

۱۲- تفاوت مزد و نفر ۲۰ ریال است بوسیله یک تساوی بنمائید.

۱۳- بنویسید که $\alpha + ۳$ مساوی سه برابر b است.

۱۴- بنویسید که $\alpha + ۳$ بزرگتر از دو برابر b است.

۱۵- درستی تساویهای زیر را با اعداد مختلفی مختلف x تحقیق کنید.

$$x + x = 2x$$

$$x + x + ۱۳ = ۱۳ + 2x$$

$$2(x + ۳) = 2x + ۶$$

بکار بردن نشانه و حرف

۱۶- اینک از دو مسئله زیر روشن میشود که چگونه بکار بردن حرف و نشانه سبب آسانی

حل مسئله میگردد و در ضمن از حل حسابی مسئله و مقایسه آن با حل جبری برتری علم جبر بر حساب واضح میشود

مسئله ۱- مجموع دو عدد ۲۵ و تفاضل آنها ۱۳ است آن دو عدد کدامند؟

حل حسابی- بنا بر فرض عدد بزرگتر ۱۳ یکه بیش از عدد کوچکتر است و چون مجموعشان در دست است پس اگر از این مجموع ۱۳ را کم کنیم مانده یعنی ۱۲ دو برابر عدد کوچکتر میشود بنابراین عدد کوچکتر نصف ۱۲ یا مساوی ۶ است و چون ۱۳ بر آن بنفیسز انیم عدد بزرگتر بدست میآید

$$6 + 13 = 19$$

حل تجربی- عدد کوچکتر را که بنفیسز انیم به x بنامیم عدد بزرگتر برابر $x + 13$ و مجموعشان مساوی $x + (x + 13)$ یا $2x + 13$ میشود و بنا بر فرض این مجموع ۲۵ است یعنی

$$2x + 13 = 25$$

چون ۱۳ از دو طرف تساوی کم کنیم حاصل میشود.

$$2x = 12$$

و از آنجا

$$x = 6$$

و بنابراین عدد بزرگتر مساوی $19 = 6 + 13$ میشود.

مسئله ۲- تفاوت فرد روزانه دو کارگر ۲۰ ریال است و چون ۳ ریال بر فرد روزانه

هر یک افزوده شود مزد بیشتر ۳ برابر مزد کمتر میشود فرد هر یک چند است؟

حل حسابی- میدانیم هرگاه بر کاسته و کاهش یاب مقداری مساوی افزوده شود

مانده تغییر نمیکند پس در حقیقت میخواهیم مسئله زیر را حل کنیم:

تفاوت دو عدد ۲۰ و عدد بزرگتر ۳ برابر عدد کوچکتر است از اینجا معلوم میشود که عدد ۲۰ دو برابر عدد کوچکتر است بنابراین عدد کوچکتر مساوی ۱۰ و عدد بزرگتر ۳۰ میباشد که چون از یک ۳ کم شود فرد و زانۀ بر کار گردست بیاید پس

مزد کوچکتر = ۷ ریال مزد بزرگتر = ۲۷ ریال

حل تحری - چون مزد کمتر را که نمیدانیم x فرض کنیم مزد بیشتر مساوی $x + 20$ میشود حال اگر بهر یک ۳ ریال بگیریم بنا بر فرض مزد بیشتر سه برابر مزد کمتر میشود یعنی

$$2(x + 20) = x + 20 + 3$$

$$2x + 40 = x + 23$$

از دو طرف تساوی یک دفعه ۹ و یک دفعه x کم کنیم نتیجه میشود

$$2x = 13$$

$$x = 7$$

و از اینجا

یعنی مزد کمتر ۷ ریال است و بنا برین مزد بیشتر مساوی $27 = 20 + 7$ ریال میشود

۷- از مقایسۀ حل حسابی و جبری این دو مسئله مخصوصاً از حل مسئله دوم می بینید که در حل

هر مسئله برای حساب یک رشته عمل ثانی بین معادله های دانستہ انجام میشود که باید از روی ظرر صحیح باشد تا بتوانیم جواب برسیم و عموماً در حل هر مسئله نکته باریکی موجود است که تا بان نکته برخوردیم

مسئله حل نمیشود چنانکه در مسئله دوم ثابت ماندن تفاوت دو فرد گرچه نکته ایست آسان ولی همه کس ممکن است متوجه آن نشود در صورتیکه در حل تحری لازم نیست باین نکته توجه شود

و جبر راه حل هر مسئله بر این روش است که صورت مسئله را بکلمات حرفه‌ای نشانده باشیم
 و پیش‌تر می‌از ۹ تا ۱۳ صفحه ۸، و چنانکه دیدیم بکار بردن حرف نشانده راه حل مسئله را بصورت
 ساده و روشن در آورده و بعلاوه بوسیله رابطه‌های ساده از نوشتن عبارتهای دراز و
 وکیل میکاهد.

بکار بردن حرف برای عمومیت دادن محاسبه‌ها

۸- گرچه روش بالا بسبب ساده نمودن حل مسئله میشود و باسانی مجهول بدست می‌آید
 در پانچ مسئله که عددی بیش نیست اثری از علمائیکه موجب رسیدن به نتیجه شده است موجود نیست
 بعضی که برای حل مسئله‌های مانند آن باید همه علمای بالا را از سر گرفت تا مجهول مسئله بدست آید.
 این نقص را بوسیله بکار بردن حرف از بین برده اند از بقدرت:

مجهولها و همچنین دانسته‌های یک مسئله را بحرف نمایش داده و مسئله را بحسب دانسته‌ها
 کلی‌تر حل میکنند جواب مسئله که از این راه بدست می‌آید عبارتست شامل کلیه علمائیکه باید در روی
 مقدارهای دانسته انجام شود تا مجهول بدست آید. این عبارت را دستور نامند مانند دستور
 (۱) در بهره کاری صفحه ۴،

نخستین فایده دستور عمومیت دادن به حل یک مسئله کلی است که از روی آن میتوان
 جمیع مسئله‌ها را که مانند مسئله کلی بوده و فقط در مقدار عددی دانسته‌ها اختلاف داشته باشند
 حل نمود.

برای فهمیدن این مطلب مسئله کلی زیر را حل میکنیم.

مسئله - مجموع دو عدد S و تفاضل آنها d است آن دو عدد که اند؟
چون عدد کوچکتر را x و عدد بزرگتر را y بنامیم این دو تساوی بدست میآید

$$x + y = S$$

$$y - x = d$$

از جمع این دو تساوی خواهیم داشت .

$$2y = S + d$$

و از آنجا $y = \frac{S+d}{2}$ و بنابرین $x = \frac{S-d}{2}$

پس جوابهای مسئله چنین است

$$(1) \begin{cases} x = \frac{S-d}{2} \\ y = \frac{S+d}{2} \end{cases}$$

بنی برگاه مجموع دو عدد x و y مساوی S و تفاضل آنها یعنی

$y - x$ مساوی d باشد y مساویست با نصف $S + d$ و x

مساویست با نصف $S - d$

از روی این دستور میتوان مسئله بالا را حل نمود چنانکه اگر مجموع دو عدد

۱۷ و تفاضل آنها باشد آن دو عدد عبارتند از:

$$x = \frac{S-d}{2} = \frac{17-1}{2} = ۳$$

$$y = \frac{S+d}{2} = \frac{17+1}{2} = ۹$$

۹- فایده‌های دیگر دستور- بکار بردن دستورهای جبری علاوه بر آنکه سبب غنیت دادن حل‌سند میگردد فایده‌های دیگری نیز دارد است که در زیر بیان میکنیم.

الف- بکار بردن حرف و نشانه عموماً سبب اختصار در نوشتن یک قضیه و بخاطر سپردن آن میشود

مثلاً بجای این که بگوئیم اگر جای سازه، حال، های ضرب را تغییر دهیم حاصل ضرب تغییر نمیکند کافی است این رابطه را بخاطر سپاریم

$$a \cdot b = b \cdot a$$

و همچنین بجای این که بگوئیم در ازای محیط دایره برابر است با حاصل ضرب قطر در عدد π کافی است محیط دایره را بجزئی C و شعاع را بسبکی از حرف‌ها مانند R بنویسد این دستور را بنویسیم.

$$C = 2\pi R$$

ب- از یک دستور میتوان دستورهای دیگر بدست آورد

مثال- اگر v نمایش‌دهنده ثابت متحرکی در یک زمان باشد و مدت حرکت t اختیار گردد رابی که متحرک پیوسته مساوی v خواهد بود که چون آنرا به e بنامیم دستور زیر بدست میآید

$$(۱) \quad e = vt$$

$$(۲) \quad v = \frac{e}{t} \quad \text{و} \quad (۳) \quad t = \frac{e}{v}$$

توجه میشود

مثلاً اگر ماشین با تندی v یکو محاسبه در زمان t مدت مسافت حرکت کرده باشد

وای که رفته از دستورا بدست میاید:

$$e = vt = 26 \times 5 = 130 \text{ کیلومتر}$$

پنجین اگر اتوبوسی ۱۶۰ کیلومتر در ۴ ساعت پیوده باشد تندی آن از دستورا معلوم میشود:

$$v = \frac{e}{t} = \frac{160}{4} = 40 \text{ کیلومتر در ساعت}$$

و وقتی تخرکی مسافت ۴۸ کیلومتر را با تندی ثابت ۹ کیلومتر در ساعت پیوده باشد مدت

حرکتش چنین است

$$t = \frac{e}{v} = \frac{48}{9} = 5 \text{ ساعت و } 20 \text{ دقیقه} = 5 \frac{4}{9} \text{ ساعت}$$

ج- بوسید ترکیب دو دستورا میتوان نتیجه های نتم بدست آورد.

مثلاً اگر c و c' به ترتیب محیط های دو دایره بشاع R و R' باشند این دو دایره

$$c = 2\pi R$$

داریم:

$$c' = 2\pi R'$$

$$\frac{c}{c'} = \frac{R}{R'}$$

از تقسیم این دو تساوی چنین نتیجه میشود
یعنی نسبت محیط دو دایره بسکد یکر مساوی نسبت بین شعاع آنهاست

پرسش های ساده شفاهی

۱- جابجهای زیر را بوسید دستورانی بنایند:

الف- S مجموع دو عدد a و b است

ج- چون در یک برخه برخه شمار، صورت و برخه نام (مخرج) را در یک عدد ضرب و با بر یک عدد تقسیم

کنیم مقدار برخه تغییر نکند

۲- بین دو عدد a و b تساویهای زیر برقرار است بر یک از آنها چه معنای دارد؟

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

۳- تحقیق کنید که تساویهای بالا صحیح است هر چه باشد a و b

۴- این عبارتها را حساب کنید و متوجه شوید که x مادی ۴ و y مادی ۵ باشد

xy^2	x^2y	$\frac{5x}{y}$
$\sqrt{x+y}$	$\sqrt{x+y}$	$\frac{5x-2y}{5}$
$2x^2-y^2$	$(y-x)(y+5)$	
$(y+x)^2$	$y^2 + 2x(5-y)$	

تمرین

۱- بر یک از عبارتهای پائین را حساب کنید

$$13 - (16 - 2) + 12 - 5$$

$$6 : 2 + 2$$

$$9 \times 23 - 2 \times 6 - 8 : (5 - 1)$$

$$24 (2 + 2) : 8 - 1$$

$$(110 - 3) (16 - 2 \times 2 + 8 : 2)$$

$$8 - 8$$

$$2 \times 4^2 - 6 \times 2 + 12 \times 35 : 2^2 \times 7 - 2^2 + (5-2)^2$$

۲- مقدار عددی x و y را از روی دستورهای

$$y = m^2 + m - 11 \quad , \quad x = A^2 - 2A - 5$$

دست آورده وقتی که $A = 10$ یا $A = 8$ یا $A = 5$ باشد

$$, \quad m = 12 \quad ; \quad m = 10 \quad ; \quad m = 15 \quad \text{باشد}$$

۳- عبارت $\sqrt{x-y} - (x-y)$ را حساب کنید

فرض کنید $x = 5$ و $y = 3$ باشد

۴- در عبارت

$$\frac{a}{a+b} + \frac{a+b}{a} + \frac{b}{a+b} + \frac{a+b}{b} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a}$$

جای a و b دو عدد دلخواه گذارد و مقدار عددی آنرا حساب و تحقیق کنید که مقدارهای

a و b هر چه باشد مقدار عددی این عبارت ۳ است

۵- a و b و c نمایش درازای (طول، پهلو و ضلع های یک سده بر مثلث)

و m نیمه پسمان (محيط) و S مساحت آن میباشد مطلوبست محاسبه مساحت سه برابری

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{دستور}$$

در حالت های مخصوص زیر

$$a = b = c = 25$$

$$a = b = 20 \quad \text{و} \quad c = 50$$

$$a = 75 \quad , \quad b = 65 \quad , \quad c = 45$$

۷- باغی است بشکل مستطیل بدارازی $ج$ و پهنای $ح$ که دور آنرا دیواری ببلندی $ا$ و پهنای $د$ کشیده اند و در میان باغ و حوضی است بشکل دایره بشعاع $ر$ حساب کنید حجم دیوار و سطح زمین باغ را
اذل از روی $ا$ و $ج$ و $ح$ و $د$ و $ر$

دوم درین حالت $ا = ۱۲۵$ $ر = ۴۰$ $د = ۶۰$ $ج = ۲۸$ $ح = ۳۸$ $ا$ متر $ح$ متر $ا$ متر $ج$ متر

$ا = ۱۵$ $ر = ۵۲$ $د = ۲۵$ $ج = ۴۰$ $ح = ۱۱۰$ $ا$ متر $ح$ متر

۸- مطلوبت تعیین دستورنگی برای محاسبه دو عدد وقتی که مجموعشان را به اینم و یکی دو برابر دیگری باشد

مسئله ای ۱۳ تا ۱۴ را به دراه حساب و نیز بسیلته بجا بردن حرف بجای داشته

مسئله دستورهای کلی بدست آورید.

۹- پیری ۵۰ سال دارد و پسرش ۱۴ سال پس از چه مدت سال پدر سه برابر سال پسر میشود؟

۱۰- عدد ۱۰ را بکنسید که $\frac{1}{4}$ آن ببلاده $\frac{1}{4}$ آن مساوی ۷ باشد.

۱۱- مطلوبت تعیین عدد دو پیکری (دورقعی) بقسمی که مجموع دو پیکرش ۹ بوده و چون آنرا

از دوازگونگی اش کم کنند عدد ۲۷ بدست آید.

۱۲- شخصی مبلغی از سرمایه اش را از قرار ۵ درصد باقی راک ۴۶۲۰ ریال پیش از مبلغ باقی است

از قرار ۶ درصد بجا میگذارد و سود سه ماهه سرمایه دوم ۴۹۴ ریال بیش از سود سه ماهه سرمایه اول بوده است مطلوبت تعیین مبلغ سرمایه.

۱۳- چه مقدار نقره و نیر باید با ۱۵۰۰ گرم شمش بعبار ۸۲۵ ریال بخریم تا بخریم شمش

حاصل ۸۷۵ ریال گردد؟

۱۴- میخواسیم مبلغ ۱۵۶۰ ریال را به قیمت کنیم بطوریکه یکی از آنها دو برابر دیگری شود.

۱۵- شخصی چند متر پارچه از تهرانه هر ۵ متری ۲ ریال خریده و از قرار هر ۷ متری ۱۱ ریال میفروشد.

و بدین ترتیب ۱۸ ریال سود میبرد چند متر پارچه خریده است؟

۱۶- شخصی مدت یک ساعت و ۲۵ دقیقه با تندی ثابتی را میبرد و پس از آن مدت ۱۲ دقیقه با تندی

تندی پیش حرکت میکند بر روی هم ۸۱۷۵ متر راه رفته است متعین کنید تندی حرکتش را در مدت

اول و مدت دوم

۱۷- پیاده‌ای از منزل خود در تهران برای رفتن بیک نقطه‌ای از شهران ساعت ۵ صبح

حرکت میکند و ساعتی ۴۵۰۰ متر می‌رود و پس از نیم ساعت توقف در آن نقطه بایستد و در برگشتن به ساعتی

۶۰۰۰ متری پیاده و نیم ساعت بعد از ظهر به منزل خود می‌رسد متعین کنید اول فاصله منزل آن شخص را از آن نقطه

دوم در چه ساعتی بمقصد رسیده است!

۱۸- فاصله دو کان زغال ۳۲۰ کیلومتر است هر خردار زغال در کان نخست ۲۴۶۰ ریال

و در دومی ۴۲۱۰ ریال قیمت دارد که اگر ای بردن ببرد و خردار زغال در کیلومتر ۷۵ ریال است

میخواسیم بن این دو کان کارخانه‌ای بنا کنیم بچه فاصله از کان نخست باید کارخانه ساخته شود

تا زغالی که از این دو کان با نجا می‌رسد دارای یک قیمت باشد؟

۱۹- پیراهن دوزی برای دو خست چند دست پیراهن و زیرشلواری ۵۷۵ متر مربع ایک

پارچه نخ لازم دارد و میخواسیم بدوزد و صورتیکه بدانیم پهنای این پارچه نخ که در بازار است

می‌آورد ۸۰ متر می‌تواند و پس از شسته شدن $\frac{1}{10}$ پهناء $\frac{1}{10}$ درازای آن آب می‌رود متعین کنید چند

باید بخرد تا رفع احتیاجش بشود؟

۲۰- دانش آموزی در درس جبر سه مرتبه امتحان میدهد در امتحانهای اول و دوم ۱۴ و ۱۵

گرفته است میخواهد معدل این سه امتحان ۱۶ شود چه نمره ای باید در امتحان سوم بگیرد؟

۲۱- معدل سه امتحان دانش آموزی ۱۵ است و باید یک امتحان دیگر بدد میخواهد معدل چهار

امتحان ۱۵٫۵ باشد چه نمره ای باید در امتحان چهارم بگیرد؟

۲۲- برای تبدیل F درجه فahrenhait (گرما سنج معمول انگلیسی است) به C درجه گراتس

$$C = \frac{5}{9} (F - 32)$$

پزشکی انگلیسی بآلین بیماری آمد و درجه او را با گرما سنج فahrenhait گرفت و ۱۰۲ درجه شد معین

کنید چند درجه (از گرما سنج ۱۰۰ درجه) تب دارد؟

۲۳- پیغمبر اسلام در سال ۶۲۲ میلادی از مکه به مدینه هجرت کرد. سالهای میلادی خورشیدی

و تاریخی که در ایران پیش از عصر پهلوی بکار میرفت هجری شمسی بود. در صورتیکه بطور تقریب ۱

سال شمسی برابر با ۹۷ سال خورشیدی باشد دستور تبدیل M سال میلادی را به H سال

هجری قمری (بطور تقریب) پیدا کنید.

۲۴- بر حسب تقسیم باشگاه سوارکاران هر سال در آخرین روز اسب و دانی تهران سه جایزه

به بهترین اسبهای برنده داده میشود. جایزه اسب نخست باید چهار برابر و جایزه دوم دو برابر جایزه

سوم باشد اگر ۱۷۵۰۰ ریال برای سه جایزه تخصیص داده باشند مبلغ هر یک چند است؟

۲۵- A ریال را به نسبت ۹ و ۶ تقسیم کند.

شده و نیز شامل پولهایست که از طرف تجارتخانه پرداخته شده است گرچه هرگاه مبلغی پولند ولی در معنی با یکدیگر اختلاف کلی دارند.

مثال ۲- از خانه بدپیرستان میروید و از دپیرستان همان راه را برگردید اینجا دوراه مساوی بنموده و اید ولی یکی شمار بدپیرستان نزدیک میکند و دیگری شمار از آن دور مینماید. بنابراین این دو مسافت دارای دو سوی مخالفند.

مثال ۳- درس جبر شما دو ساعت بطرمانده است و یا آنکه در درس شما دو ساعت از طرمانده شده است این دو مدت نیز دارای دو سوی مخالفند.

۱۱- عدد مانیکه در حساب بکار میرود برای نمودن اینگونه چندیها کا

میستند

وقتی مجهول یک مسئله از چندیهائی است اکتیث است نمودار باید علاوه بر محاسبه مقدار عددی مجهول نوی آن تعیین گردد.

عددهائی حسابی تنها مقدار عددی مجهول را بدست میدهند بدون اینکه نوی آنرا معین کنند و اگر بنحوا هم بکند عددهائی حساب نوی چندیها نیز معلوم شود ناچاریم الفاظی بکار برده جمله بندی کنیم.

مثلاً بگوئیم ۵ ریال بستانکاریم یا ۵ ریال بدبکار که دو لفظ بستانکاریم و بدبکار نوی چندی را معلوم میکند. بنابراین عددهائی حسابی به تنهایی برای نمایش چندیها یکبارگی و نوی مخالفند کافی نیست باشد

دجبر برای اندازه گرفتن اینگونه چندینا عدد نامی درست کرده اند که هم مقدار عددی و هم
 منوی چندی را نمایند این عددها همان عددهای حسابند که بر آنها یکی از دو نشانه + یا -
 مقدم شده باشد.

مثال - اگر بطور کلی مبلغ بتانی (مطلب) را بعلامت + و بدی را بعلامت - بنامیم و مثال
 پیش بجای این که بنویسیم ۵ ریال بتانکاریم کافیست بنویسیم ۵ + ریال و بجای آنکه بنویسیم ۵ ریال
 بدکاریم بنویسیم ۵ - ریال

میتوان گفت که دارائی ما ۵ + ریال یا ۵ - ریال میباشد

مثال دیگر - متحرکی از نقطه ۰ واقع بر خط مستقیم x حرکت میکند فرض میکنیم

۱ متر حرکت کرده باشد متحرک ۱ میم معلوم کنیم کجا رسیده است - برای این مقصود باید بدانیم بطرف

$$x \xrightarrow{\quad 0 \quad} x$$

راست ۰ حرکت کرده است یا بطرف چپ.

چنانکه می بینیم عدد ۱ - بتانی برای تعیین جای متحرک کافی نیست بلکه باید بر این عدد

یکی از دو نشانه بطرف راست یا بطرف چپ را اضافه کرد تا جای متحرک معلوم شود.

مثال اگر برای راه متحرک جهت راست می پایدان نشانه + و مخالف آنرا بان نشانه -

بنامیم قسمتی که بنویسیم ۱ + متر بخیزد معلوم میشود که این متحرک در فاصله ۱ متری نقطه ۰ دست

راست آن واقع است همچنین اگر ۱ - متر بخیزد باشد معنای آن این است که متحرک ۱ متری

۰ دست چپ آن رسیده است.

مثال دیگر - اگر سطح اقیانوس را مبدأ ارتفاع فرض کنیم و ارتفاع نقاط بالای آن را باشد + و نقاط پایین تر را با نشانه - بنامیم و قسیدگی بگویند بلندی یک نقطه ۷۰۰ + متر است معلوم میشود که آن نقطه ۷۰۰ متر بالاتر از سطح دریا واقع است .

و وقتی گفتیم بلندی دریای خزر ۲۰ - متر است معلوم میشود که سطح دریای خزر ۲۰ متر از سطح اقیانوس پایین تر است .

مثال دیگر - اگر درجه حرارت مکانی ۱۵ - باشد معلوم میشود که آن مکان ۱۵ درجه سردتر از جایی است که دمای آب شدن است .

۱۲ - عدد های جبری - هر عدد حسابی را که نشانه + جلوی آن باشد عدد مثبت و هر عدد حسابی را که نشانه - جلوی آن باشد عدد منفی می نامند .

مانند $\frac{۲}{۳} +$ (خوانده میشود بعلاوه دو سوم) و $۷۷ -$ (منهای هشتاد و هفت) عدد های مثبت و عدد های منفی را عدد های جبری گویند .

۱۳ - عدد های حسابی را قدر مطلق عدد های جبری گویند .

چنانکه $۷۳ +$ قدر مطلق و عدد جبری $۷۳ +$ و $۷۳ -$ است و قرار بر این داده اند که قدر

مطلق عدد جبری α را چنین نویسند $|\alpha|$

$$پس \quad |-۲| = ۲$$

۱۴ - تساوی دو عدد جبری - دو عدد جبری وقتی مساویند که دارای یک

قدر مطلق و یک نشانه باشند .

۱۵- دو عدد دقرینه - دو عدد جبری که دارای یک قدر مطلقند ممکن است مساوی

نباشند مانند -۷ و $+۷$

هرگاه قدر مطلق دو عدد مساوی ولی نشانه آنها مختلف باشد آنگاه دو عدد را دقرینه میگویند

گویند مانند -۷ و $+۷$; $-x$ و $+x$; -۵ و $+۵$ -

۱۶- غایب و عمل نشانه + را از جلوی عدد های جبری برداشته آنها را بدون نشانه

نویسند مثلاً بجای $+۵$ و $+۷۳$ و $+۵$ فقط ۵ و ۷۳ و ۵ نویسند.

ولی به حقت نباید عدد های منفی را بدون نشانه - نوشت.

پرسش های ساده شفاهی

۱- شماره شاگردان کلاسی ۲۵ است ۷ نفر آنان غایبند حاضران غایبان را با عدد جبری

بنایند.

۲- دو متحرک از نقطه ۰ بر خط راستی حرکت می نمایند موضع های این دو متحرک را بوسیله

زین بندی و مترج نمودن خط و همچنین فاصله های آن دو را از یکدیگر و هر یک از حالت های زیر

معین کنید :

اولی $+۸$ متر و دومی $+۷$ متر پیوسته

-۱۲ -۹

$+۷$ -۵

-۶ $+۲$

اولی . ۴ - متر و دومی ۱۴ + متر پیچوده

۰ + ۵ ۰ ۰ + ۵ ۰

۳ - بلندترین نقطه های کره زمین قله کوادورست است به بلندی ۱۸۲۰ متر در شرق ترین نقطه ای

بن نقطه ای از ته اقیانوس ساکن است به ژرفای عمیق ۹۵۰۰ متر این و طول را بعد جبری

۴ - گرماسنجی ۱۵ زینه درجه را نشان میدهد - اگر سطح آبگون (مایع) درونی آن از زینه

۱۷ زینه یا ۱۵ زینه پایین باید چه زینه را نشان خواهد داد؟

۵ - گرماسنجی در ساعت ۷ صبح ۱۰ - زینه را نشان میدهد اگر بر ساعتی که میگذرد سطح آبگون

زنی آن سه زینه بالا باید معین کنید در ساعت های ۹ و ۱۰ و ۱۱ و ۱۲ صبح چه زینه ای را

نشان خواهد داد؟

۶ - تجارتخانه ای در یک روز بر شرح پائین داد و دست نداده است .

نخستین بار - دو دریافتی مبلغ ۴۵۰ ریال و ۳۰۰ ریال داشته است .

بار دوم - ۳۵۰ ریال و ۵۰۰ ریال پرداخته است .

بار سوم - ۶۵۰ ریال پرداخته و ۹۰۰ ریال دریافت داشته است .

بار چهارم - ۳۰۰ ریال دریافت داشته و ۷۵۰ ریال پرداخته است .

بار پنجم - ۲۰۰ ریال دریافت داشته و ۲۰۰ ریال پرداخته است .

از لا مطلوبت نمایش پولهای دریافتی و پرداختی تجارتخانه بعدد های جبری

نمایش نتیجه هر بار داد و دست را بعد جبری بنمایند

ب- جمع عددهای جبری

مثال ۱- باربری در یک روز دو دفعه بار برده است یک دفعه ۵ ریال و یک دفعه ۷ ریال
مزد گرفته پنجاه یک دفعه ۵ ریال و دفعه دیگر ۷ ریال خرج کرده است درآمد و هزینه او را بعد از
جبری بنویسد.

اگر درآمد را بعد مثبت و هزینه را بعد منفی بنویسیم دو عدد $+۵$ و $+۷$ به نایس درآمد
و دو عدد -۱۵ و -۷ به نایس هزینه های او میباشند و روشن است که مجموع چند درآمد در آمد
یعنی مجموع چند عدد مثبت عددیست مثبت پس مجموع درآمد های او یعنی مجموع $+۵$
و $+۷$ عدد $+۱۲$ خواهد بود یعنی

$$(+۵) + (+۷) = +۱۲$$

و چون مجموع چند هزینه هزینه است بنابراین مجموع چند عدد منفی عددیست منفی
پس مجموع هزینه های او یعنی مجموع دو عدد -۱۵ و -۷ عدد -۲۲ می باشد یعنی

$$(-۱۵) + (-۷) = -۲۲$$

ازین مثال قاعده زیر نتیجه میشود:

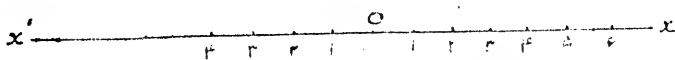
۱۷- قاعده- مجموع دو یا چند عدد جبری هم نشانه عددیست جبری
که قدر مطلق مساوی مجموع قدر مطلقهای آن چند عدد بود و نشانه آن
یا آینهایی باشد:

$$(+۱۱) + (+۷) = +۱۸$$

$$(-\frac{1}{5}) + (-\frac{3}{5}) = -\frac{4}{5}$$

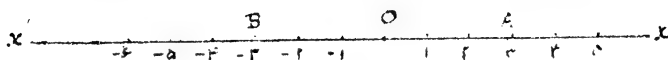
۱۸- بر روی خط راست xx' دلخواه نقطه ای مانند O برگزیده و از دو سمت آن

قطعه های مساوی برای این خط جدا میکنیم حال اگر فاصله های نقطه O را از نقطه های واقع در سمت



راست آن بعد و سمت بنام فاصله های نقطه O از نقطه های واقع در سمت چپ بعد و منفی نامیش

داد و خواهد شد مثلاً نقطه ای که فاصله اش از O $+3$ است نقطه A است نقطه B



فاصله اش -3 است نقطه B می باشد.

میدانیم که مجموع دو عدد $+2$ و $+3$ عدد $+5$ است - از روی خط زیرینم دار

بالا، رسم میشود این مجموع را بدین قسم بدست آورده که از نقطه 2 شروع کرده با اندازه سه قطعه سمت

راست برویم تا به نقطه 5 برسیم یعنی $+2 + (+3) = +5$

پسین اگر بخوایم مجموع -2 و -4 را حساب کنیم کافیست که از نقطه 2 شروع کرده

4 قطعه سمت چپ بشماریم تا به نقطه -2 برسیم یعنی $-2 + (-4) = -6$

میدانیم تفاضل $5-2$ مساوی 3 است از روی خط بالا هم میتوانیم این عمل تفریق را

باین شکل انجام داد که از نقطه 5 شروع کرده با اندازه 3 قطعه سمت چپ برویم و بنصورت

نقطه 2 میرسیم همین ترتیب اگر از عدد 5 پنج یکم بجاییم به نقطه 0 میرسیم - بطور کلی برای

تفریق این قاعده را داریم:

برای کم کردن عدد مثبت a از عدد مثبت b کافی است از نقطه b شروع

کرده باندازه α قطع بسمت چپ برویم تا بنقطه $\alpha - \beta$ برسیم.
اگر بنحو β سیم مطابق این قاعده عدد α را از β کم کنیم بنقطه ۱- برسیم یعنی

$$4 - 5 = -1$$

ولی چنانکه میدانیم این تفریق در حساب ممکن نیست زیرا α بزرگتر از β است و فقط می‌توان
چهار یک α را از یک β کم کرد و یک یک زیاد است که نیست و این کم کنیم و در حقیقت ۱- نمانش
یعنی یک یک کم نشده است و همچنین در تفریق $2 - 5 = -3$ عدد ۲- نمانش ۵ یک α است که نتوانیم
از ۳ کم کنیم

مثال - اگر درآمد شخصی ۵ ریال و هزینه اش ۷ ریال باشد گوئیم دارائی او $5 - 7$

یعنی ۲- ریال است - مطابق شرح بالا معنای آن این است که هزینه او ۲ ریال بیش از درآمدش

پیش های ساده شفاهی

بوسیله خط زینده دار بالا اعلی های زیر را انجام دهید

$$4 + 3$$

$$6 - 4$$

$$7 - 7$$

$$2 - 6$$

$$4 - 9$$

$$5 - 5$$

تجربه - روشن است که مثلاً برای کم کردن 6 از 15 می‌توانیم یک β های 6 را یکی

از 15 کم کنیم تا به مانده ۹ برسیم می‌توان نیز یک قسمت از یک β های 6 مثلاً 4 یک α اول

تفریق کرد تا بشود ۱۱ و بعد ۲ یک دیگر را از ۱۱ کم کرد تا به ۹ برسیم و در هر تفریقی می‌توان ماند

این مثال را

مثلاً برای کم کردن ۱۵ از ۶ اگر مستقیماً عمل کنیم به مانده ۹- برسیم:

$$۶ - ۱۵ = -۹$$

و میتوان مثلاً اول ۶ یک ۱۵ را از ۶ کم کرد تا بشود صفر و بعد ۹ یک دیگر را از صفر کم کنیم

تا به ۹- برسیم یعنی

$$۰ - ۹ = -۹$$

بهمین میتوان اول ۷ یک ۱۵ را از ۶ کم کرد تا بشود ۱- و بعد ۸ یک دیگر را از ۱-

تفریق کرد تا به ۹- برسیم یعنی

$$-۱ - ۸ = -۹$$

و نیز میتوانیم اول ۸ یک کم کنیم تا بشود ۲- و بعد ۷ یک دیگر را

و مانند اینها

$$-۲ - ۷ = -۹$$

و این تفریق تا هم از روی خط زیننه دار بالا با سانی انجام میشود - مثلاً برای کم کردن

۷ از ۲- کافیست از نقطه ۲- شروع کرده هفت قسمت بطرف چپ برویم تا به نقطه ۹-

برسیم

پرسش های ساده شفاهی

بر سینه خط زیننه دار بالا عمل های زیر را انجام دهید

$$۳ - ۲$$

$$۰ - ۷$$

$$-۳ - ۲$$

$$۴ - ۵$$

$$-۳ - ۲$$

$$۰ - ۵$$

۱۹- چون غرض از کم کردن عدد α از عدد α پیدا کردن عددیست مانند α که چون با α جمع شود عدد α بدست آید بنا برین از تفریق

$$۲ - ۵ = -۳ \quad \text{نتیجه میشود که} \quad ۵ + (-۳) = ۲$$

$$۲ + (-۵) = -۳ \quad \text{و} \quad -۳ - ۲ = -۵$$

$$۵ + (-۵) = ۰ \quad \text{و} \quad ۰ - ۵ = -۵$$

از تساویهای طرف چپ قاعده زیر بدست میآید:

۲۰- قاعده - مجموع دو عدد جبری که نشانه آنها یکی نیست عددیست

جبری که قدر مطلقش مساوی تفاضل قدر مطلقهای آن دو عدد بوده نشانه اش نشانه عددیست که قدر مطلقش بیشتر است

۲۱- نتیجه اول - مجموع دو عدد دترینه صفر است

نتیجه دوم - چون مجموع دو عدد دترینه عددیست که قدر مطلقش صفر بوده و علامتش

بدلخواه + یا - میباشد بنا برین

صفر هم عددیست جبری که میتوان بر آن + یا - مقدم داشت و یا از آن بدون نشانه نوشت

نتیجه سوم - حاصل جمع هر عدد جبری با صفر خود آن عدد است .

مثال ۱- شخصی ۱۵۰ ریال بستانکار است و ۱۲۰ ریال بکار مسلف دارا می آید

معلوم است که این شخص ۱۲۰ - ۱۵۰ = ۳۰ ریال بستانکار است چون مبلغ بدی و اربعد
جبری منفی مبلغ بستانی و اربعد جبری مثبت بنائیم و چون مجموع دو عدد جبری ۱۵۰ + ۱۲۰ یعنی
۲۷۰ + ۳۰ میشود بنا برین برای تعیین و اراالی شخص باید مبلغی را بستانی
که بعد جبری نموده شود و اندک بیکدیگر جمع نمود

مثال ۲ - شخصی برخط راستی از مبدأ ۵ - ۲۷۰ متر بطرف راست حرکت کرده باشد
را بپایان ۳۰۰ متر در جهت مخالف رفته میخواهیم بدانیم چه فاصله از نقطه ۵ رسیده و کجا
طرف آن واقع است ؟

بستانی از روی کینه مثل معلوم میشود که این شخص فاصله ۲۷۰ - ۳۰۰ یعنی به ۳۰ متری
مستقیم ۵ رسیده است .

ولی چون دو عدد جبری ۲۷۰ + ۳۰۰ را با هم جمع کنیم از روی قاعده بالا (۲۱)

نتیجه میشود

$$(-300) + (+270) = -30$$

بنابرین برای تعیین موضع متحرک باید راههای پیوده شده در جهت های مختلف اگر با عددی
جبری نموده ایم با هم جمع کنیم

۲۲ - تبصره - در همین مثال بجای اینکه متحرک اول ۲۷۰ + متر راه رود و بعد ۳۰۰ متر

اگر اول ۳۰۰ متر و بعد ۲۷۰ متر میرفت همان نقطه میرسید یعنی نتیجه یکی میشد - پس

$$(+270) + (-300) = (-30) \quad (+270) + (-300) = (-30)$$

یعنی در جمع دو عدد جبری میتوانیم جای آن دو عدد را عوض کنیم بدون اینکه مجموع جبری تغییر کند.

۲۳- جمع چند عدد جبری - برای پیدا کردن حاصل جمع عددهای $2 + 2 - 7$ -

$8 + 6 - 7$ که بصورت $(-6) + (+8) + (-7) + 2$ نوشته میشود قرار بر اینست که ابتدا مجموع دو عدد اولی را حساب کرده آنرا با سومی جمع کنیم و بعد حاصل را با چهارمی جمع نماییم تا حاصل جمع کل بدست آید.

$$+ 2 + (-7) + (+8) + (-6) =$$

$$-5 + (+8) + (-6) =$$

$$+3 + (-6) = -3$$

عدد ۳- را مجموع جبری عددهای بالا گویند.

۲۴- خواص جمع - الف - چنانکه دیدیم میتوان در جمع دو عدد جبری جای آن دو عدد را تغییر داد و جمع چند عدد جبری هم میتوان جای آنها را بدو نحو تغییر داد مثلاً این تساوی برقرار است

$$8 + (-3) + (-4) = -4 + (+8) + (-3)$$

نیز از روی قرار داد بالا (۲۳) بتقریب خواهیم داشت

$$8 + (-3) + (-4) = 5 + (-4) = +1$$

$$-4 + (+8) + (-3) = +4 + (-3) = +1$$

نتیجه

ب - در جمع چند عدد جبری میتوان بجای دو یا چند عدد آنها مجموع
جبریشان را قرار داد
مثلاً دوی زیر برقرار است

$$(+۸) + [(-۷) + (-۳)] = (-۷) + (+۸) + (-۳)$$

مطابق قرار داد مجموع جبری طرف اول ۲- و طرف دوم مساوی حاصل جمع کر شده است ۸+
یا $(+۸) + (-۱۰)$ یعنی ۲-

۲۵- نتیجه ۱- از دو خاصیت بالا نتیجه میشود که در جمع جبری چند عدد میتوان
دو عدد و قرینه را حذف نمود بدون اینکه مجموع جبری تغییر کند

۲۶- نتیجه ۲- میتوان برای محاسبه مجموع جبری چند عدد عددی مثبت و عددی
منفی را جداگانه جمع نمود تا این مجموع مبدل به مجموع دو عدد جبری شود یکی مثبت و یکی منفی مثلاً

$$+۴ + (-۷) + (+۸) + (-۳) + (-۶) =$$

$$+۴ + (+۸) + (-۷) + (-۳) + (-۶) = +۱۲ + (-۱۶)$$

$$= -۴$$

بوسیده این قاعده میتوان عمل جمع عددی جبری را تسهیل نمود

پرش های ساده شفاف

۱- حاصل جمعی زیر را از زودی قاعده های جمع به دست آورده بوسیده خط زینه دارند

بررسی نتیجه را تحقیق کنید.

$$\begin{array}{lll} 5 + (+2) & 2 + (-5) & 5 + (-2) \\ -3 + (-2) & -4 + (-1) & -7 + (+1) \\ -6 + (+6) & -8 + (+9) & 0 + (-2) \end{array}$$

۲- حاصل جمعهای زیر را حساب کنید

$$\begin{array}{ll} +\frac{2}{3} + (+\frac{7}{3}) & -2,5 + (-3,5) \\ +1\frac{2}{5} + (-1\frac{1}{5}) & 2,5 + (-5,5) \\ -7 + (-2) + (-) & (-10) + (+15) + (-5) \end{array}$$

۳- دانش آموزی در راه خانه بدر کس ۱۵۰ متر از خانه دور میشود و در همان راه ۷۵ متر برگشته باز ۳۰۰ متر بطرف مدرسه میرود معلوم کنید بچه فاصله از خانه رسیده است.

۴- شخصی ویدی دارد یکی ۱۵ ریال دیگری ۱۰ ریال در عوض ۱۲ ریال بستانکار است مقدار دارائی او را تعیین کنید.

۵- سه ساعت به ظهر مانده است ۱۵ ساعت دیگر چه ساعتی است و یا آنکه چهار ساعت

پیش چه ساعتی بوده؟

۶- در هر یک از تساویهای زیر یکجای علامت ؟ عدد مناسب بگذارید تا تساوی برقرار باشد

$$\begin{array}{ll} 5 + ? = 10 & -9 + ? = -7 \\ -11 + ? = -5 & 15 + ? = 3 \\ 8 + ? = & !2 + ? = 6 \end{array}$$

$$۷ + ۲ = -۱۱$$

$$-۸ + ۲ = ۰$$

ج- تفسیق عدد های جبری

۲۶- تعریف- چنانکه در حساب دیده ایم غرض از کم کردن عدد جبری ج (کاسته

! مفروق) از عدد جبری α (کاهش یا مفروق منه) پیدا کردن عددیست جبری مانند β (مانده) که چون با α جمع جبری شود مجموع مساوی α شود.

و آنرا چنین نویسند $\alpha - \beta = \alpha$

این تعریف همانست که در حساب دیده ایم

مثال-

$$+۳ + (+۲) = +۷ \quad \text{زیرا} \quad +۷ - (+۲) = +۴$$

$$+۷ + (-۴) = +۳ \quad \circ \quad +۳ - (+۷) = -۴$$

$$-۶ + (-۲) = -۹ \quad \circ \quad -۹ - (-۶) = -۳$$

$$+۱۱ + (-۳۰) = -۱۹ \quad \circ \quad -۱۹ - (+۱۱) = -۳۰$$

$$-۱۹ + (+۳۰) = +۱۱ \quad \circ \quad +۱۱ - (-۱۹) = ۳۰$$

پرسش های ساده شفاهی

۱- هر یک از عدد های سمت راست را مطابق علامت آن با علامت α جمع کنید (یعنی در هر یک

از مثال های پائین عددی تعیین کنید که چون با کاسته جمع شود کاهش یا بدهت آید)

$$۷ \text{ از } ۹ \quad -۵ \text{ از } ۵ \quad ۵ \text{ از } ۵$$

$$۶ \text{ از } ۵ \quad -۵ \text{ از } ۵ \quad ۹ \text{ از } ۵$$

$$۲+۵ \text{ از } ۵ \quad -۱۵ \text{ از } ۱۱ \quad -۲ \text{ از } ۰$$

$$۰ \text{ از } -۳ \quad ۰ \text{ از } ۸ \quad ۸ \text{ از } ۰$$

۲- در مثالهای بالا نشان دادیم که کاسته را تغییر داده (یعنی اگر + است - و اگر - است

منه) با کاهش یا ب جمع کنید و در هر یک از مثالها تحقیق کنید که اینجمله مساوی تفاضل دو عدد مفروض است

۲۸- موافق تعریف تفریق عدد d وقتی مساوی مانده $a-b$ است که

$b+d$ مساوی a باشد:

$$b+d=a$$

اگر برد و طرف این تساوی قرینه b (کاسته) را بیفزاییم نتیجه میشود

$$b+d+(-b)=a+(-b)$$

$$d=a+(-b)$$

یعنی برای بدست آوردن d با مانده $a-b$ کافیست با a کاهش یا بقرینه

b (کاسته) را جمع کنیم

از اینجا قاعده تفسیر بدست آمد:

قاعده - برای تفریق دو عدد جبری کافیست قرینه کاسته را کاهش یا

جمع کنیم تا مانده بدست آید.

در قسمت ۲ پرسش‌های بلا مانده را از روی همین قاعده بدست آوردیم .
 ۲۹- از اینجا معلوم میشود که در جبر عمل تفسیق تبدیل به جمع میشود بنا برین تفریق دو عدد دیگر
 همواره ممکن بوده . دارای هیچ شرطی نیست در صورتیکه در حساب این عمل وقتی ممکن است که گاهی
 باب بزرگتر از کاسته یا دست کم مساوی آن باشد .

مثال - $-۵ - (+۱۱) = -۵ + (-۱۱) = -۱۶$

$-۵ - (-۵) = -۵ + (+۵) = ۰$

$۰ - (+۳) = ۰ + (-۳) = -۳$

$۰ - (-۳) = ۰ + (+۳) = +۳$

پرسش‌های ساده شفاهی

هر یک از عددی هست راست را موافق قاعده تفریق از عدد سمت چپ کم کنید .

۵ از ۱۱ -۵ از ۱۴ ۹ از ۹

۳ از ۸ -۸ از ۳ ۲٫۵ از ۲٫۵

$-\frac{۵}{۴}$ از $\frac{۵}{۴}$ -۹ از -۹ -۱۷ از -۱۴

۲٫۵ از ۰ -۳٫۷۵ از ۰ $-\frac{۱}{۴}$ از $-\frac{۱}{۴}$

$-\frac{۱}{۴}$ از $-\frac{۱}{۴}$ -۱٫۲۵ از ۲٫۷۵ $\frac{۱۱}{۵}$ از $\frac{۷}{۵}$

۳۰- چون مطابق قاعده های جمع و تفریق و از روی خط زینسه دار ۱۸ عمل کنیم

خواهیم داشت :

$$۵ + (+۲) = +۷ = ۵ + ۲$$

$$۲ + (-۵) = -۳ = ۲ - ۵$$

$$۵ - (+۲) = ۵ + (-۲) = ۳ = ۵ - ۲$$

$$۷ - (-۱) = -۷ + (+۱) = -۶ = -۷ + ۱$$

$$۰ + (+۵) = +۵$$

$$۰ + (-۲) = -۲$$

$$۰ - (-۳) = ۰ + (+۳) = +۳$$

ازین چند مثال قاعده زیر را نتیجه میگیریم :

۳۱- قاعده - دو نشانه پی در پی را اگر یکی باشد میتوان حذف نموده بجای آنها یک نشانه گذاشت اگر دو نشانه پی در پی یکی نباشند میتوان بجای آنها یک نشانه - قرار داد

فرار داد

یعنی بطور کلی

$$+ (+ a) = + a$$

$$+ (- a) = - a$$

$$- (+ a) = - a$$

$$- (- a) = + a$$

پرسش های ساده شفاهی

در هر یک از تساویهای پانین بجای ؟ عددی بگذارید تا تساوی برقرار باشد

$$-(+۷) - (+۵) = ۲$$

$$-(+۲) - (-۴) = ۲$$

$$-(-۲) - (-۴) = ۲$$

$$-(-۲) + (-۴) = ۲$$

$$-(-۴) + (-۶) = ۲$$

$$-۵ + ۲ = -۳$$

$$۹ - ۲ = ۷$$

$$-۲ + ۲ = ۰$$

$$-۹ + ۲ = -۷$$

$$-۶ - ۲ = -۸$$

$$۱۳ + ۲ = ۱۵$$

$$-۴ - ۲ = -۶$$

۳۲- هرگاه بخواسیم چند عدد جبری را بایکدیگر جمع کنیم موافق فاعده بالا (۳۱) می آید

کافیت آنگدو مارا با علامتهای خود دنبال هم بنویسیم مثلاً اینمجموع را

$$-۲ + (+۵) + (+۱) + (-۳)$$

میتوان چنین نوشت

$$-۲ + ۵ + ۱ - ۳$$

یعنی نشانه های جمع را نمی نویسیم و فاعده این کار اختصار در نوشتن است

پس باید در نظر داشت هرگاه چند عدد جبری دنبال یکدیگر نوشته شده باشند مقصود

اینست که باید آنگدو مارا با هم جمع نمود.

$$مثال ۱- \quad +۶ + (-۱) + (-۴) = +۶ - ۱ - ۴ = +۱$$

$$مثال ۲- \quad ۳ - (-۴) + (-۸) = ۳ + (+۴) + (-۸)$$

$$= ۳ + ۴ - ۸ = -۱$$

در مثال دوم قبلاً عمل تفریق (۲-) را مبذول بجمع نمودیم و پس از آن موافق قاعده بالا

عدد را در بنال بزم نوشتیم

پرسش های ششم

نشانه های جمع و تفریق بین عدد های جبری زیر را حذف نموده آنها را بصورت ساده بنویسید و حاصل

هر یک را بدست آورید

$$+(-2) + (-5)$$

$$+(-7) - (-3)$$

$$-(-4) + (-3)$$

$$-(-5) - (-1)$$

$$-2 + (-3) - (-4)$$

$$+(-3) - (-3) + (-1)$$

$$-3 + (-1) - (+2) - (-3) - (-4)$$

$$-(-2) + (-3) - (-5) - (+1)$$

$$2 - (-1) + (-2) - (+1) - (+2)$$

۲۳- چند جمله عددی - چند جمله عددی عبارتست از چند عدد جبری که بین آنها فقط

نشانه جمع (+) و تفریق (-) یا یکی از آنها باشد.

و چنانکه دیدیم هر چند جمله را میتوان بجمع چند عدد جبری تبدیل نمود.

مثلاً $(-3) - (+1) + (+5) - 2$ چند جمله ایست عددی و میتوان آنرا چنین نوشت

$$-2 - 5 + 1 + 3$$

عدد های ۲- و ۵- و ۱+ و ۳+ را که باید با یکدیگر جمع نمود جمله های این

چند جمله نامیم.

و همچنین $\alpha - \beta + \gamma - \delta$ چند جمله است که جمله های آن α و β و γ و δ و

α - باشد

۲۴ - بخوابیم دو چند جمله $1 - 2 - 5 + 7 - 6 + 2$ را با هم جمع کنیم حاصل جمع

میتوان چنین نوشت

$$(1 - 2 - 5 + 7 - 6 + 2) + (2 + 7 - 6)$$

چون چند جمله اول مساوی ۶ - و دومی مساوی ۴ + است پس مجموع آن دو مساوی

$$6 + 4 = 10 \text{ - یعنی } 2 \text{ - است.}$$

حال اگر جمله های این چند جمله را با هم جمع کنیم یعنی دو چند جمله را دنبال هم بنویسیم این

چند جمله

$$1 - 2 - 5 + 7 - 6 + 2 + 2 + 7 - 6$$

بدست می آید که چون جمله های آنرا با هم جمع کنیم همان مجموع دو چند جمله بالا یعنی ۲ - حاصل میشود ازین مثال نتیجه میکشیم که:

برای جمع کردن چند جمله با جمله های آنها را دنبال هم نوشته آنها با هم جمع میکنیم (این قاعده عکس قسمت ب از بند ۲۴ است) مثال -

$$(-10) = 2 + 7 - 6 - 6 + 7 - 9 = (-6 + 3) + (-5 + 7 - 9)$$

$$(-c) + (c - y - a) = a - c + c - y - a = -y$$

۳۵- تعریف- برگاه دو چند جمله S و S' دارای یک عده جمله بود
قرینه هم باشند این دو چند جمله را قرینه یکدیگر گویند مانند

$$S = 1 - 2 + 7 \quad \text{و} \quad S' = -2 + 2 - 7$$

واضح است که مجموع دو چند جمله متضاد صفر است

$$۳۶- \text{مجموع این دو چند جمله } 1 - 2 + 3 - 4 \text{ را از چند جمله } 5 + 7 - \text{تفریق کنیم}$$

$$\text{میتوان چنین نوشت} \quad (-5 + 7) - (-2 + 3 - 4)$$

چون حاصل کاهش $2 +$ و حاصل کاسته $3 -$ است پس تفاضل آن دو مساوی $5 +$ و یا $2 + 3$ میشود

حال اگر قرینه چند جمله کاسته را بر چند جمله کاهش بفرزائیم همان تفاضل بالابسته

از اینقرار:

$$(-5 + 7) + (2 - 3 + 4) = 2 + 2 = 4$$

ازین مثال نتیجه بگیریم که:

برای تعیین تفاضل دو چند جمله میتوان چند جمله کاهش را بر

چند جمله کاسته افزود

مثال-

$$(-2 + 5 - 7) - (-2 + 11 - 1) = -2 + 5 - 7 + 2 - 11 + 1 = -12$$

$$(a-b) - (-c + y + a) = a - b + c - y - a = -y$$

۳۷- برداشتن کذاشتن پرانتز - از طلب های بالا معلوم میشود که:

اولاً میتوان پرانتزهای را که در جلوی آن نشانه + است حذف نمود
درین صورت نباید نشانه جمله های آن تغییر کند.

و اگر جلوی پرانتز نشانه - باشد برای برداشتن پرانتز باید نشانه جمله های
داخل را تغییر داد

$$(a + 2 - b - 7) = a + 2 - b - 7$$

$$-(a + 2 - b - 7) = -a - 2 + b + 7$$

ثانیاً بالعکس - همواره میتوان یکچند جمله را درون پرانتزهای که دارای نشانه
+ است نوشت

و نیز میتوان نشانه جمله های یکچند جمله را تغییر داد و آنرا درون پرانتزهای که
دارای

نشانه - است بنویسیم مثلاً

$$3 - 2 + 5 - 11 + 7 =$$

$$= (3 - 2 + 5) + (-11 + 7) = -(-3 + 2 - 5) - (11 - 7)$$

$$a - b + x - y =$$

$$= (a + x) - (b + y) = -(b - x) - (y - a)$$

پیش های ساده

۱- مجموع تفاضل چند جمله ای $a + b$ و $a - b$ را حساب کنید

فرض کنید:

$$\begin{cases} a = -5 \\ b = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 15 \\ b = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -10 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = +7 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

۲- چند جمله‌ای زیر را مجموع و همچنین تفاضل دو در آن مرتبه یک کسبه

$$-15 + 7 - 5 + 11$$

$$-a + b - c + d$$

$$x - y - 2 + a + 12$$

$$-2 + a - 2x - b$$

$$-15 + x - x + 7$$

$$-20 - a + y - m$$

تمرین

۱- حاصل هر یک از چهار تنای زیر را بدست آورید

$$(+18) + (-9) + (-11) - (-15) - (+7)$$

$$-(-20) - (+5) + (-7) - (-12) + (-15)$$

$$(-2) - [(+3) - (-2) + (-11) - (+7)]$$

$$A' = -15 + 7 + 12 - 4 \quad , \quad A = -2 + 7 - 2 + 1 \quad \text{فرض ۲-}$$

$$A + A' + A'' \quad \text{حساب کنید چند جمله‌ای} \quad A'' = -3 + 12 - 27 + 11$$

$$b = A + A' \cdot A'' , A = (A' + A'') , A = A' + A''$$

۳- چند جمله‌ای $a - b + c$ را در این حالت احساب کنید:

$$a = + ۲۵ \quad b = + ۷ \quad c = + ۱۲$$

$$a = - ۲۵ \quad b = - ۷ \quad c = - ۱۲$$

$$a = + ۲۵ \quad b = + ۷ \quad c = - ۱۲$$

$$a = + ۲۵ \quad b = - ۷ \quad c = + ۱۲$$

$$a = - ۲۵ \quad b = - ۷ \quad c = + ۱۲$$

۴- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را احساب کنید:

$$(۲ - ۷ + ۱۳) + (۱۸ - ۵ - ۲۱)$$

$$(-۱۰ + ۱۵ - ۲۹) - (-۲۵ + ۱۱ - ۱۵)$$

$$(-۳ + ۷ - ۱۲) - (۳ + ۵ - ۶ - ۲) - (۱۷ - ۱۱ + ۵)$$

$$(۱۵ - ۲ + ۷) - (۳ - ۲ + ۷) - ۱۲$$

۵- ادرشیدس ۲۱۲ سال پیش از میلاد در دوقبصر ۴۴ سال پیش از میلاد گذشته شد و گالیله در ۶۳۲ پس

از میلاد و لیلیا می کردش زمین را انشاء داد و جلوس علیحضرت پهلوی در ۱۳۰۴ پس از هجرت است و اولین

گشت بنای دانشگاه تهران در سال ۱۳۱۳ پس از هجرت گنده اردو شد - اذل هر که ام از بین تاریخ را بعد دهی

حیرتی بنایند دوم تاریخ های میلادی را بهجری و یا بکس تبدیل کنید سوم فاصله زمان این تاریخها را دود بدست

آورید.

۶- وقتی که تهران غمر است در مارس ۳ ساعت و ۱۷ دقیقه بظهر مانده است معلوم کنید ۲ ساعت بعد از

طریقی مطابق چه ساعتی از تهران است و همچنین ساعت ۱۱ بعد از ظهر تهران مطابق چه ساعتی در پاریس است.

۷- شخصی در ماه اول ۵۰ ریال در صندوق پس انداز میگذارد و در ماه دوم ده ریال کمتر و در ماه سوم ده ریال از ماه پیش کمتر پس انداز میکند و این کار را تا مدت ۹ ماه میکند. اول مبلغ پس انداز این شخص را در هر ماه تعیین کنید و سپس انداز منفی را تعبیر کنید (دوم مبلغ کل پس انداز را پس از مدت ۹ ماه بدست آورید).

۸- ارشید حس حکیم ریاضی دان در سال ۲۸۷ پیش از میلاد متولد شد و در سال ۱۱۲ پیش از میلاد درگذشت.

حساب کنید چند سال زندگی کرده است

۹- خانه جمشید و خانه خسرو و مدرسه آنها در کوچه راستی واقع است. فاصله خانه جمشید از مدرسه ۵۰۰ قدم و فاصله خانه خسرو از خانه جمشید ۲۷۰ قدم است. تعیین کنید فاصله خانه خسرو را از مدرسه. این مسئله چند جواب دارد؟
۱۰- در مسئله بالا بطور کلی اگر فاصله خانه جمشید از خانه خسرو α قدم باشد و خانه جمشید β قدم از مدرسه فاصله داشته باشد معین کنید فاصله خانه خسرو را از مدرسه در حالت های مختلف.

۱۱- دبیرستانی در کوچه راستی واقع است و در پوش و ایرج از این مدرسه بکوچه می آیند. اولی α متر و دومی β متر راه میروند بفرض اینکه α و β دو عدد جبری باشند. اول فاصله آن دو نفر را حساب کنید. دوم مقدار ای جبری γ و δ تابع چه شرطی باشند تا این دو نفر در یک طرف مدرسه واقع شوند و یا آنکه مدرسه بین آنها باشد. سوم اگر مجموع جبری راه بایک رفته باشند صفر باشد چه نتیجه میگیرید در حال فاصله آنها چند خواهد بود؟

۱۲- گرماسنجی را در دو آبگون داخل کردیم در آتولی ۱۵ درجه و در دومی ۲۷- درجه نشان داده است.

و اختلاف حرارت این دو آبگون چند است؟

۱۳- درجه صفر گرما سنجی نقطه معین شده است بقسمی که درجه صفرش مطابق ۳ درجه بالای صفر است اگر این گرما سنج درجه های ۲۵ + و ۶۳ + و ۵ + و ۳ - و ۱۵ - را نشان دهد مقدار حقیقی این درجه با چند راست؟

۱۴- اگر صفر گرما سنجی مطابق چهار درجه زیر صفر باشد درین گرما سنج مقدار حقیقی ۴ و ۷۵ و ۱۲۰ و ۲۰ - و ۲۰ - و ۴۳ - را معلوم کنید

۱۵- دو مدرسه که در بازی فوتبال مدرسه ما شرکت کرده بودند پس از تمام شدن مسابقه با اولی فته برده بود و ۵ دقیقه پیچ بر پیچ شده و ۳ دقیقه باخته است و دومی ۷ دقیقه برده و ۳ دقیقه پیچ بر پیچ شده و ۵ دقیقه باخته است اگر هر دو فته بر دمی یک دانه شود و برای هر دو فته باخت یک یک کم شود فته مسابقه با هر یک از دو مدرسه را معین کنید.

۱۶- پدری در موقع تولد پسر بزرگش ۳۱ سال دارد و در موقع تولد دخترش ۲۷ سال از دنیا گذشته است معین کنید سن دختر را تا سنیکه آن پسرش سی سال میشود.

۱۷- ساعت جمشید ۱۰ دقیقه جلوتر از ساعت دبیرستان است و ساعت دبیرستان ۵ دقیقه از ساعت شهرداری عقب است اگر ساعت شهرداری نمره را نشان دهد ساعت جمشید و ساعت دبیرستان هر یک چه وقتی را معین میکنند؟

۱۸- در شهری ساعت است شخصی در ضمن گردش می بیند که هر سه ساعت یک موقع را نشان میدهند و صورتیکه از ساعت اول ساعت دوم ۱۵ دقیقه در راه بوده و از ساعت دوم تا ساعت سوم ۱۱ دقیقه راه پیموده است و ساعت خود را ۱۸ دقیقه از ساعت سوم عقب است اگر ساعت دوم صحیح باشد هر یک از این ساعتها

چه تعبیری باید داد؟

۱۹- شخصی به مثوانگی از دهستان ۱۳ دقیقه پیش از رسیدن ترن وارد ایستگاه و راه آهن شد اما خبر دادند که ترن ۲۷ دقیقه دیرتر از موقع مقرر خواهد رسید اگر ترن بتواند ۱۲ دقیقه زودتر برسد چقدر باید منتظر شود؟

۲۰- ترنی از ایستگاه با ۲۰ نفر مسافر درجه اول و ۸۵ مسافر درجه دوم و ۱۱۵ مسافر درجه سوم حرکت میکند در اولین ایستگاه از درجه اول ۵ نفر و از درجه دوم ۲۷ نفر و از درجه سوم ۴۰ نفر خارج میشوند و در عوض ۸ مسافر درجه اول و ۱۵ مسافر درجه دوم و ۴۴ مسافر درجه سوم سوار میشوند در ایستگاه دوم ازین سه درجه بترتیب ۱۹ و ۴۸ و ۵۹ نفر پائین میآیند و ۴ نفر درجه اول و ۱۵ نفر درجه دوم و ۲۹ نفر درجه سوم سوار میشوند و در ایستگاه سوم همه خارج میشوند معین کنید در ایستگاه دوم از هر درجه چند نفر خارج شده است؟

۲۱- نخستین انشمندهای که کتاب جبر و مقابله نوشته محمد پسر موسی خوارزمی است که ایرانی و سال ۲۲۲ هجری شمسی فوت کرده است و نخستین اروپائی که جبر را بصورت کنونی در آورده و کارت Descartes فرانسوی است که در ۱۵۹۶ بدنیآ آمد و معلوم گشت که او تا چند سال پیش از عالم اروپائی بکفر ایرانی جبر و مقابله را نوشته تا بنی چند سال پیش خوارزمی بنویسته؟

د- ضرب عددهای جبری

۳۸- در حساب مقصود از ضرب عدد a در b جمع عددی است که هر یک از

شماره آن عدد باشد از شماره یک تا b باشد.

مانند ۴×۴ یعنی $۴ + ۴$ یا ۸

ما این تعریف را در ضرب عدد های جبری عمومیّت میدهم ازین قرار:

در جبر مقصود از ضرب عدد مثبت در عدد جبری α جمع عدد هایست که بزرگ مساوی

بوده و شماره آنها باندازه شماره یک های قدر مطلق آن عدد مثبت باشد

و مقصود از ضرب عدد منفی در عدد جبری α تفریق کردن عدد هایست که بزرگ مساوی

بوده و شماره آنها باندازه شماره یک های قدر مطلق آن عدد منفی باشد

مثال ۱- مقصود از $(+۲) \cdot (+۴)$ جمع عدد $۴ + ۴$ است و در نتیجه

بنابراین

$$(+ ۴) \cdot (+ ۲) = (+ ۴) + (+ ۴) = + ۸ = + (۴ \times ۲)$$

مثال ۲- مقصود از $(+۲) \cdot (-۴)$ جمع عدد $۴ - ۴$ است و در نتیجه

بنابراین

$$(- ۴) \cdot (+ ۲) = (- ۴) + (- ۴) = - ۸ = - (۴ \times ۲)$$

مثال ۳- مقصود از $(-۲) \cdot (+۴)$ تفریق عدد $۴ + ۴$ است و در نتیجه

بنابراین

$$(+ ۴) \cdot (- ۲) = - (+ ۴) - (+ ۴) = - ۸ = - (۴ \times ۲)$$

مثال ۴- مقصود از $(-۲) \cdot (-۴)$ تفریق $۴ - ۴$ است و در نتیجه

بنابراین

$$(- ۴) \cdot (- ۲) = - (- ۴) - (- ۴) = + ۸ = + (۴ \times ۲)$$

ازین چند مثال این قاعده کلی برای ضرب دو عدد جبری بدست میآید:

۳۹- قاعده - حاصل ضرب دو عدد جبری عددیست جبری که قدر مطلقش مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای آن دو عدد میباشد نشانه آن + است وقتی که آن دو عدد هم نشانه باشند و اگر نه - است.

از روی قاعده بالا نشانه حاصل ضرب بطور خلاصه چنین است:

+	=	+	در	+
-	=	+	در	-
-	=	-	در	+
+	=	-	در	-

هر یک از دو عددی را که در هم ضرب میشوند سازه مینامند

۴۰- نتیجه - از فرم ۳۸ معلوم میشود که حاصل جمع n سازه مساوی برابر حاصل

ضرب عدد n است در آن سازه

$$(-x) + (-x) + (-x) = (-x) \cdot ۳$$

مثال در تحقیق درستی قاعده بالا - اتوبوسی بر جاده راست x کیلومتر

در هر ساعت ۳۰ کیلومتر راه می پیماید و لمر بنقطه ۰ میرسد میخواهیم موضع این اتوبوس را روی این جاده دو ساعت پیش از ظهر یازده ساعت بعد از ظهر تعیین کنیم یعنی بوسیله عددی جبری

هم فاصله انوبسیل را از O بدست بیاوریم و هم معین کنیم در کدام طرف O واقع است

$$x \xrightarrow[\quad O \quad]{\begin{array}{cc} A & B \end{array}} x$$

معلوم است فاصله انوبسیل از O یکومتر است باید معلوم کنیم در کدام سمت O واقع است
 قبل از آنکه بگویم که راههای پیچیده شده بسوی راست مثبت و راههای پیچیده شده بسوی چپ منفی
 باشد همچنین مانعهای پیش از ظهر را منفی و زمان بعد از ظهر را مثبت اختیار میکنیم و هر یکومتر را
 روی خط xx بیک سانتی متر نشان بدهیم و دو حالت در نظر میگیریم:

حالت اول انوبسیل بسوی راست میرود - بنابراین را بیکدیگر ساعت

می باید عدیست مثبت مساوی $+۳۰$ و چون ظهر O میرسد پس دو ساعت پیش از ظهر وضع A
 و طرف چپ O فاصله ۲×۳۰ رسیده است حال اگر اندازد جبری OA را به OA بنامیم
 نتیجه میشود $\overline{OA} = -۶۰$ کیلومتر

و چون ظهر O رسیده پس در دو ساعت بعد از ظهر نقطه B که فاصله ۶۰ کیلومتر

از O و در طرف راست است میرسد یعنی $\overline{OB} = +۶۰$ کیلومتر

اگر بطرفی برای بدست آوردن را بیکدیگر نخران پیچیده دستور $e = v \times t$ (نمود ۹)

قسمت ب) را بکار ببریم و در آن v و t و e را عدد دای جبری بگیریم نتیجه بالا را
 بدست بیاوریم از بنظر آید:

در دو ساعت پیش از ظهر خوابیم داشت

$$e = \overline{OA} = (+۳۰) \cdot (-۲) = -۶۰ \text{ کیلومتر}$$

و در دو ساعت بعد از ظهر

$$e = \overline{OB} = (+۳۰) \cdot (+۲) = +۶۰ \text{ کیلومتر}$$

حالت دوم اتوبوس میل بسوی چپ می‌رود - بنابراین رایگه در یک ساعت می‌پیماید
 حد ولایت منفی مساوی ۳۰ - پس در دو ساعت پیش از ظهر بوضع B در طرف است O و فاصله

$$\overline{OB} = +۶۰ \text{ کیلومتر یعنی}$$

و در دو ساعت بعد از ظهر به A که سمت چپ O و فاصله ۶۰ کیلومتر است رسیده یعنی

$$\overline{OA} = -۶۰ \text{ کیلومتر}$$

از روی دستور هم همین نتیجه گرفته میشود:

و در دو ساعت پیش از ظهر

$$e = \overline{OB} = (-۳۰) \cdot (-۲) = +۶۰ \text{ کیلومتر}$$

و در دو ساعت بعد از ظهر

$$e = \overline{OA} = (-۳۰) \cdot (+۲) = -۶۰ \text{ کیلومتر}$$

پیشش‌های ساده

حاصل ضرب‌های زیر را حساب کنید

$$+۵ \text{ در } +۷ \text{ ; } +۶ \text{ در } -۴ \text{ ; } +۹ \text{ در } -۱۱$$

$$-۵ \text{ در } -۲ \text{ ; } -۵ \text{ در } ۱۶ \text{ ; } -۹ \text{ در } ۵$$

$$-۴ \text{ در } ۱۱ \text{ ; } -۵ \text{ در } -۵ \text{ ; } ۵ \text{ در } -۲$$

$$\begin{array}{ccccccc} ۱۲ & , & ۱ & -۸ & , & -۱ & ۸ \\ ۰,۵ & , & -۱ & -۱,۵ & , & -۱ & ۱ \end{array}$$

۴۱- تحقیق کنید که این تساویها برقرار است.

$$(+۳)(+۵) = (+۵)(+۳)$$

$$(+۴)(-۷) = (-۷)(+۴)$$

$$(-۲)(+۶) = (+۶)(-۲)$$

$$(-۸)(-۴) = (-۴)(-۸)$$

از اینجا معلوم میشود:

حاصل ضرب دو عدد جبری بشکلی بجای آن دو عدد ندارد.

$$ab = ba \quad \text{یعنی بطور کلی}$$

۴۲- از اینکند در مطلق حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب در مطلقهای سازه های ضرب

تبعی می شود که:

حاصل ضرب هر عدد در صفر مساوی صفر است

$$0 \times a = a \times 0 = 0 \quad \text{یعنی}$$

و بعکس هرگاه حاصل ضرب صفر باشد تخاکمی از سازه های آن صفر است.

بنابراین: شرط لازم و کافی برای اینکه حاصل ضربی صفر باشد اینست که دو
کم یکی از سازه های آن صفر باشد

و همچنین از ضرب هر عدد در ۱- قرینه آن عدد بدست میآید و بعکس هر عدد مساوی حاصل ضرب ۱- در قرینه آن عدد است.

$$\text{یعنی} \quad -1 \times x = x \times (-1) = -x$$

۳- تحقیق کنید این تساویها برقرار است.

$$(+2) \cdot (+5) = - [(-2)(+5)] = - [(+2)(-5)]$$

$$(-4)(+7) = - [(+4)(+7)] = - [(-4)(-7)]$$

$$(-2)(-9) = - [(+2)(-9)] = - [(-2)(+9)]$$

$$(-6)(+11) = + (+6)(-11)$$

$$(-5)(-3) = (+5)(+3)$$

از اینجا معلوم میشود که:

اگر نشانه یکی از دو سازه تغییر کند نشانه حاصل ضرب تغییر میکند

$$\text{یعنی بطور کلی} \quad xy = -[(-x)y] = -[x(-y)]$$

بنابراین اگر نشانه هر دو سازه تغییر کند نشانه حاصل ضرب تغییر نمیکند

$$\text{یعنی} \quad xy = (-x)(-y)$$

۴- حاصل ضرب چند عدد جبری - حاصل ضرب چند عدد جبری بدین شکل بدست

میآید که دو سازه اول و دوم را در هم ضرب نموده حاصل را در سازه سوم ضرب میکنیم و اینجا ضرب را در سازه چهارم و بهین ترتیب عمل می‌کنیم تا حاصل ضرب این چند عدد بدست آید

مثال -

$$(-۴)(+۲)(-۵) = (-۸)(-۵) = +۴۰$$

$$(+۲)(-۲)(+۲)(+۵) = (-۶)(+۷)(+۵)$$

$$= (-۴۲)(+۵) = -۲۱۰$$

پریش های ساده

حاصل ضرب های زیر را بدست آورید

$$(-۲)(-۳)(-۱) \quad (+۲)(+۳)(+۱)$$

$$(-۱)(-۷)(-۳)(-۱) \quad (-۳)(+۵)(-۲)$$

$$(+۲)(-۱)(-۵)(+۱) \quad (-۲)(-۹)(-۵)(+۱)$$

$$(-۱)(+۷)(-۱۱)(۰)(-۸) \quad (-۵)(+۴)(-۳)(+۱)(۰)$$

۴۵- در بک از مثال های بالا تخمین کنید که اگر جای سازه های ضرب را

تغییر دهیم حاصل ضرب تغییر میکند

۴۶- از مثال های بالا معلوم میشود که اگر شماره سازه های منفی جهت یا

باشد نشانه حاصل ضرب + است و گرنه نشانه - است.

از دو خاصیت بالا قاعده زیر برای ضرب چند عدد جبری نتیجه میشود:

قاعده - حاصل ضرب چند عدد جبری عددیست جبری که قدر

مطلقش مساوی حاصل ضرب قدر مطلقهای آن چند عدد بوده و

نشانه اش + است اگر شماره سازه های منفی جهت و یا صفر باشد و گرنه

- خواهد بود

۴۷- نتیجه - هرگاه یکی از سازدها صفر باشد حاصل ضرب صفر میشود

۴۸- تخمین کنید که تساویهای زیر درست است.

$$[(-2)(+5)] \cdot (+3) = [(-2)(+3)] \cdot (+5)$$

$$= [(+5)(+3)] \cdot (-2)$$

$$[(-1)(-4)(+2)](-2) = [(-1)(-2)](-4)(+2)$$

$$= [(-4)(-2)](-1)(+2)$$

$$= [(+2)(-2)](-4)(-1)$$

از اینجا نتیجه بگیریم که برای ضرب یک عدد در حاصل ضرب چند عدد کافی است
العدد را در یکی از آن چند عدد ضرب کرده و از روی قاعده بالا حاصل
ضرب را بدست آورد

یعنی $(abc) \cdot x = (ax)bc = (bx)ac = (cx)ab$

پرسشهای ساده

حاصل ضربهای زیر را حساب کنید

۱- وقتی که $a = -2$ ، $b = -5$ باشد

abc ، $a = +2$ ، $b = -2$ ، $c = 0$

$5xy$ ، $x = -5$ ، $y = -2$

$$y = -2, \quad x = -2, \quad \alpha = 1 \quad \text{و تکی که} \quad -2\alpha xy$$

$$y = +2, \quad x = +2, \quad \alpha = -1 \quad \text{و} \quad "$$

$$y = +2, \quad x = +2, \quad \alpha = +1 \quad \text{و} \quad "$$

$$y = 0, \quad x = 0, \quad \alpha = -2 \quad \text{و} \quad "$$

۴۹- اذل منهای این تساویها را بیان کنید

$$5(-2+4) = 5(-2) + 5(+4)$$

$$-2(-1+2-4) = (-2)(-1) + (-2)(+2) + (-2)(-4)$$

$$(-5-2+7)(-9) = (-5)(-9) + (-2)(-9) + (+7)(-9)$$

دوم تحقیق کنید که تساویهای بالا درست است

از مثالهای بالا چنین برآید:

برای تعیین حاصل ضرب یک عدد جبری در مجموع چند عدد میتوان
العدد جبری را در هر یک از جمله های مجموع ضرب نموده حاصل ضربی
جزء را با اسم جمع جبری نمود.

$$(a-b+c) m = am - bm + cm \quad \text{یعنی}$$

۵۰- میخواهیم مجموع جبری (۳-۴) را در مجموع جبری (۱-۵+۲) ضرب کنیم

مستقیماً این حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب ۱- در ۱+۲ است که مساوی ۲- میباشد

نیز میتوان یکی از این دو مجموع (مثلاً مجموع دوم) را یک عدد فرض نموده مطابق نموده ۴۹ ضرب

کرد از بنقرار:

$$(-2 + 5 - 1)(2 - 4) = (-2 + 5 - 1)(+2) + (-2 + 5 - 1)(-4)$$

طرف دوم را نیز میتوان مطابق نموده ۴۹ بسط داد بنا برین حاصل ضرب چنین میشود

$$(-2 + 5 - 1)(2 - 4) =$$

$$(-2)(+2) + (+5)(+2) + (-1)(+2) + (-2)(-4) + (+5)(-4) + (-1)(-4) =$$

$$-4 + 10 + -2 + 8 + -20 + 4 =$$

$$= -29 + 27 = -2$$

و همچنین

$$(a + b - c)(x - y) = (a + b - c)x + (a + b - c)(-y)$$

$$= ax + bx - cx - ay - by + cy$$

پیشش های ساده

۱- حاصل ضربهای زیر را از دو راه بدست آورید

$$5(a + b), \quad \text{فشیکه} \quad a = -2, \quad b = -1, \quad \text{باشد}$$

$$b = -2, \quad a = 2, \quad x = -1, \quad x(a - b)$$

$$x(a + b - 4)$$

$$a = -2, \quad y = -1, \quad x = 2, \quad -12(x - y)(-a)$$

$$b = -2, \quad a = 2, \quad (a - b)(a + b)$$

فرض کنید $(a-b)(a+b)$ $a=2$, $b=-2$

$a=-2$, $b=2$

$a=1$, $b=-1$; $x=2$, $y=-2$ $(x-y)(a+b)$

$a=0$, $b=0$; $x=0$, $y=1$

۲- دو مسافر از شهری با فاصله ۵ کیلومتر در ساعت و ۱۰ کیلومتر در ساعت حرکت
 می‌کنند می‌خواهیم فاصله آنها را پس از گذشت ۲ ساعت و ۲۵ دقیقه حساب کنیم در صورتیکه آن‌ها یک جهت
 نیاورند و جهت مختلف حرکت کنند

۵- تقسیم دو عدد جبری

۵۱- غرض از تقسیم عدد جبری a بر عدد جبری b مقسوم علیه پیدا کردن

است جبری باشد q خارج قسمت بطوریکه حاصل ضرب b و q مساوی a شود و آنرا
 نین گوئیم

$$\frac{a}{b} = a : b = q$$

بنابراین a معلوم می‌شود که $a = bq$

مثال

$+ 8 = (+2)(+4)$

زیرا

$\frac{+8}{+2} = +4$

$+ 10 = (-2)(-5)$

•

$\frac{+10}{-2} = -5$

$-12 = (+4)(-3)$

•

$\frac{-12}{+4} = -3$

$$+۲ = \frac{+۲}{-۶} \quad \text{زیرا} \quad (-۶)(+۲) = -۱۲$$

پیش‌های ساده

خارج‌قسمت‌های زیر را حساب کنید

$$\begin{array}{rcl} ۱ & \div & ۲ \quad ; \quad ۱ \div -۳ \quad ; \quad -۱ \div ۲ \\ -۱۵ & \div & -۵ \quad ; \quad +۱۵ \div -۵ \quad ; \quad -۱۵ \div +۵ \\ +۲۶ & \div & -۱ \quad ; \quad -۲۶ \div -۱ \quad ; \quad -۲۶ \div +۱ \\ -۵ & \div & ۵ \quad ; \quad -۵ \div -۵ \quad ; \quad ۵ \div -۵ \\ x & \div & -۱ \quad ; \quad ۱ \div -x \quad ; \quad -۱ \div +x \end{array}$$

۵۲- از مثال‌های بالا معلوم شود:

اولاً قدر مطلق خارج‌قسمت مساوی خارج‌قسمت قدر مطلق مقسوم بر قدر مطلق مقسوم علیه است
 ثانیاً نشانه خارج‌قسمت + است وقتی که مقسوم و مقسوم علیه هم‌نشانه (بر دو مثبت یا بر دو منفی) باشند و - است وقتی که دارای نشانه مختلف (یکی مثبت و دیگری منفی) باشند

و نیز میتوان از ردی‌های $a = b$ همین نتیجه را گرفت:

اگر a و b دارای یک نشانه باشند نشانه a باید باشد تا نشانه حاصل ضرب یعنی a همان نشانه a شود و اگر نشانه a و b یکی نباشد بهین دلیل باید a منفی باشد
 بنابراین برای تقسیم دو عدد جبری این قاعده را خواهیم داشت:

قاعده- خارج‌قسمت عدد جبری a بر عدد جبری b عدد

جبری مانند α بقسمی که قدر مطلق مساوی خارج قسمت قدر مطلق مقسوم α بر قدر مطلق مقسوم علیه β باشد و نشانه اش $+$ است اگر مقسوم و مقسوم علیه هم نشانه باشند و $-$ است.

برای این نشانه خارج قسمت از روی قاعده بالا بطور خلاصه میتوان نوشت:

$$+ \text{ تقسیم بر } + = +$$

$$+ \text{ بر } - = -$$

$$- \text{ بر } + = -$$

۵۳- حالت های مخصوص - نخست - اگر مقسوم علیه مساوی $+$ شد خارج قسمت مساوی مقسوم میشود بعبارت دیگر خارج قسمت بر عدد یک مساوی خود آنگاه است

$$\text{یعنی} \quad - \alpha : + 1 = \frac{\alpha}{+1} = \alpha$$

دوم - اگر مقسوم مساوی صفر و مقسوم علیه مخالف صفر باشد خارج قسمت صفر میشود

زیرا از تساوی $\alpha = 0$ معلوم میشود که هرگاه $\alpha = 0$ و $\beta \neq 0$ باشد

طرف اول صفر است ناچار طرف دوم نیز مساوی صفر بوده و از آنجا α باید صفر باشد

سوم - اگر مقسوم علیه صفر و مقسوم مخالف صفر باشد تقسیم محال است

زیرا خارج قسمت را بر عددی فرض کنیم چون حاصل ضربش در صفر مساوی صفر میشود و یا بر این فرض کنیم
مساوی مقسوم که صفر نیست باشد.

تبصره - از آن دیهای $\frac{2}{1} = 2$ و $\frac{2}{-1} = -2$ و $\frac{2}{10} = 20$ و $\frac{2}{-10} = -20$ و ... معلوم می شود که هر

قدر مطلق مقسوم علیه کوچک شود قدر مطلق خارج قسمت بزرگ میشود و چون قدر مطلق صفر از قدر مطلق نام عدد کوچکتر است بنابراین
قدر مطلق خارج قسمت بر عدد بر صفر از قدر مطلق نام عدد بزرگتر میشود و چون چنین عددی را نمیتوان معین کرد آنرا
بعلامت ∞ نمایش داده اند و آنرا بی نهایت گویند.

۵۴ - عکس یک عدد - عکس یک عدد مساوی خارج قسمت ۱+ است برای

چنانکه عکس عدد ۴ - عدد $\frac{1}{4}$ - است و بطور کلی $\frac{1}{a}$ عکس عدد a میباشد

از روی این تعریف معلوم میشود که:

حاصل ضرب هر عدد در عکس خود مساوی ۱+ است

۵۵ - درستی تساویهای زیر را تحقیق کنید

$$\frac{-24 \times 3}{1} = \frac{-24}{1} \times 3 \quad , \quad \frac{-20 \times 4}{5} = \frac{-20}{5} \times 4$$

$$\frac{+18 \div (-2)}{-3} = \frac{+18}{-3} \div (-2) \quad , \quad \frac{-36 \div (-3)}{-4} = \frac{-36}{-4} \div (-3)$$

$$\frac{41}{(-6) \times 2} = \frac{41}{-6} \div 2 \quad , \quad \frac{-40}{4 \times (-5)} = \frac{-40}{4} \div (-5)$$

$$\frac{-27}{(-9) \div (-3)} = \frac{-27}{-9} \times (-3) \quad , \quad \frac{-36}{-12 \div 3} = \frac{-36}{-12} \times 3$$

$$\frac{+30 \div 2}{-54 \div 2} = \frac{+30}{-54} \quad , \quad \frac{-12 \times (-3)}{-6 \div (-3)} = \frac{-12}{-6}$$

از این تساویها میتوان خاصیت های زیر را نوشت:

۵۶- نخست - هرگاه مقسوم در عددی ضرب شود خارج قسمت در آن عدد ضرب میشود

۵۷- دوم - هرگاه مقسوم بر عددی تقسیم شود خارج قسمت بر آن عدد تقسیم میشود

۵۸- سوم - هرگاه مقسوم علیه در عددی ضرب شود خارج قسمت بر آن عدد تقسیم میشود

۵۹- چهارم - هرگاه مقسوم علیه بر عددی تقسیم شود خارج قسمت در آن عدد ضرب میشود

۶۰- پنجم - هرگاه مقسوم و مقسوم علیه در عددی ضرب یا بر عددی تقسیم شوند خارج قسمت تغییر نمیکند.

۶۱- منای این ارباب را بگویند و تحقیق کنید که هر یک درست است :

$$(۸ + ۱۲ - ۲۰) : (-۴) = \frac{-۸}{-۴} + \frac{+۱۲}{-۴} + \frac{-۲۰}{-۴}$$

$$(۹ - ۱۸ - ۳) : (+۳) = \frac{+۹}{+۳} + \frac{-۱۸}{+۳} + \frac{-۳}{+۳}$$

ارین ارباب معلوم میشود که :

در تقسیم مجموع جبری چند عدد بر یک عدد میتوان هر یک از جمله های آن مجموع را بر آن عدد تقسیم نمود و خارج قسمت های جز را جمع کرد بطور کلی نمیتوان نوشت :

$$(a + b + c) : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

زیرا از ضرب این خارج قسمت در m مقسوم بدست میآید:

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}\right) \times m = \frac{a}{m} \times m + \frac{b}{m} \times m + \frac{c}{m} \times m$$

$$= a + b + c$$

($\frac{a}{m} \times m$ مساوی a است زیرا $\frac{a}{m}$ خارج قسمت تقسیم a بر m است بهینطور

$$\left(\frac{b}{m} \times m = b, \dots\right)$$

۶۲- تحقیق کنید که تساویهای زیر درست است:

$$(-3 \times 2 \times -12) : (-4) = (-3 \times 2) \times \frac{-12}{-4} = -3 \times 2 \times 3$$

$$(-4 \times -20 \times -7) : (+5) = (-4 \times -7) \times \frac{-20}{+5} = -4 \times -7 \times -4$$

یعنی: برای تعیین خارج قسمت حاصل ضرب چند عدد جبری بر یک عدد جبری a میتوان یکی از آن عددها بر a تقسیم نمود و خارج قسمت در حاصل ضرب سایر عددها ضرب نمود

$$\frac{bcd}{a} = \frac{b}{a} \times cd = \frac{c}{a} \times bd = \frac{d}{a} \times bc$$

یادآوری - $\frac{-1 \times 12 \times 20}{-4}$ را نمیتوان چنین نوشت:

$$\frac{-1}{-4} \times \frac{12}{-4} \times \frac{20}{-4}$$

زیرا موافق قاعده بالا باید یکی از سازدها بر -4 تقسیم شود و نه همه آنها

و- نامساویهای عددی

۳- وقتی گویند عدد جبری α بزرگتر از عدد جبری β است (که $\alpha > \beta$) مثبت باشد و در غیر این حالت $\alpha < \beta$ میباشد.

مثلاً چون تفاضل $+7 = (-2) - (-9)$ مثبت است بنابراین $2 < 9$.

..... $-4 = (-3) - (-7)$ منفی است بنابراین $3 < 7$.

از این تعریف نتیجه‌های زیر بدست میآید:

۴- نخست - هر عدد مثبت از صفر بزرگتر است و هر عدد منفی از صفر کوچکتر

است

دوم - هر عدد مثبت بزرگتر از هر عدد منفی است

سوم - از دو عدد منفی آنکه قدر مطلقش بزرگتر است کوچکتر میباشد

زیرا هرگاه دو عدد α و β منفی باشند و بفرض اینکه $|\alpha| > |\beta|$ باشد لازم میآید

که $\alpha < \beta$ - منفی باشد بنابراین $\alpha < \beta$ خواهد بود

نتیجه - رشته اعداد صحیح جبری ترتیب کوچکی و بزرگی چنین است

..... ۴، ۳، ۲، ۱، ۰، -۱، -۲، -۳، -۴،

چهارم - میتوان برد و طرف یک نامساوی مقداری افزود یا

از دو طرف مقداری کاست بدون اینکه جهت نامساوی تغییر کند یعنی

طرفی که بزرگتر بود بزرگتر میماند

بفرض α میتوان به طرف مقدار جبری β را افزود در صورت خواهیم داشت

$a+c > b$ زیرا تفاضل $a-b$ ثابت میماند

پنجم- میتوان دو طرف نامساوی را در عدد مثبت ضرب نمود و این که جهت نامساوی تغییر نکند

۵ < ۷- از ضرب دو طرف در ۲ نتیجه میشود $10 < 14$ - ۲۱- زیرا تفاضل منفی است
ششم- چون دو طرف نامساوی در عدد منفی ضرب شود جهت نامساوی تغییر میکند (یعنی اگر طرف اول بزرگتر است کوچکتر از طرف دوم میشود و اگر کوچکتر است بزرگتر میگردد)

۷ < ۲- از ضرب دو طرف در ۳- نتیجه میشود $21 < 6$

تمرین ۱

۱- حاصل ضربهای ab و ac را در یخالت احساب کنید:

$$b=4; a=-1 \text{ و } b=10; a=-5; a=-9; b=-5; a=+5$$

$$a=b=-10; c=12; b=-15; a=5; b=-11; a=-20$$

$$a=b=c=-7, c=-8$$

$$(2x-y)(2x+y)(x-y-1), (x+y)(x-y)-2$$

در هر یک از یخالت احساب کنید

$$y=-2; x=5 \text{ و } y=7; x=2 \text{ و } y=-4; x=2$$

$$y=4; x=-12 \text{ و } y=-5; x=-5 \text{ و } y=-8; x=-7$$

۳- $(a+b)(c+d) - ۲$ ، $(a-b)(c-d)$ ، و در نهایت حاصل کنید

$$a = ۱۲ \quad b = ۸ \quad c = -۲۰ \quad d = ۱۱$$

$$a = -۱۲ \quad b = -۱۱ \quad c = -۵۰ \quad d = ۳۰$$

$$a = ۱۱ \quad b = ۱۱ \quad c = ۱۱ \quad d = -۱۱$$

$$a = ۹۵ \quad b = -۵ \quad c = -۱۴ \quad d = -۳$$

$$a = -۲ \quad b = -۸ \quad c = -۱۵ \quad d = ۲۵$$

۴- عملهای زیر را انجام دهید و حاصل هر یک را بدست آورید

$$(-۲۱ + ۱۰ - ۱۵)(-۵) - (۷ - ۱۲)(-۳)$$

$$[(-۵ + ۱۱ - ۷) - (-۸ + ۱۱ - ۵)](-۶ + ۱۲)$$

$$[(-۲۰ + ۱۰ - ۵) - (-۱۰ + ۴ - ۹)][(۲۸ - ۱۵) - (۱۲ + ۷ - ۱)]$$

۵- تخمین کنید که تساویهای زیر درین حالتهاى مخصوص درست است

$$x = -۵ \quad \text{بستید} \quad ۴x - ۲ = ۲x - ۱۲$$

$$x = ۱۲ \quad * \quad ۳x - ۵ = ۲x + ۷$$

$$\begin{cases} x = ۵ \\ y = -۱ \end{cases} \quad * \quad ۲x + ۳y = ۱۷ + ۱۰y$$

$$\begin{cases} x = ۲ \\ y = ۲ \end{cases} \quad = \quad (x-y)(y-۲) = ۲x -$$

۶- عملهای زیر را انجام دهید و حاصل هر یک را بدست آورید

$$(-18 + 35 - 8) : (-2 + 7 - 15)$$

$$-117 : (5 - 3 + 9 + 2)$$

$$(-21)(49)(-56) : (-7)(-3)$$

$$(5-2)(7-3) : (4-7)$$

$$\{-2 + (+2)(-5) + 17 - 12(-25)\} : (10 - 12)$$

۷- حاصل $\frac{a}{c}$ ، $\frac{a-b}{c}$ را در حالت های زیر بدست آورید

$$a = -15 \quad b = 5 \quad c = 2$$

$$a = 24 \quad b = -8 \quad c = -6$$

$$a = -2 \quad b = 12 \quad c = 18$$

$$a = -41 \quad b = -15 \quad c = -30$$

۸- تحقیق کنید که تساوی های زیر درین حالت درست است

$$x = -9 \quad \text{وقتی که} \quad \frac{x}{3} + 2x = 6 + 3x$$

$$\begin{cases} x = -18 \\ y = -28 \end{cases} \quad \frac{x}{18} - \frac{y}{7} = 3$$

۹- تحقیق کنید که آیا نامساوی های زیر درین حالت های مخصوص درست است یا نه و نامساوی ها

نادرست را درست کنید

$$x = 2 \quad \text{فرض کن که} \quad 2x - 2 > (x-2)(x-7)$$

$$x = 5 \quad \cdot \quad 2x - 5 < \frac{x+2}{x-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ b = -2 \end{array} \right\} \quad \cdot \quad a - b > \frac{a+b}{b} = \frac{a-b}{a}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 1 \end{array} \right\} \quad \cdot \quad \frac{a+b}{a-b} > \frac{a-b}{a+b}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ b = 1 \end{array} \right\} \quad \cdot \quad (a-b)(a+b) < 2ab$$

۲- اگر $b < a$ باشد ثابت کنید که

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

۱- اگر a, b مثبت باشند ثابت کنید که

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

۱۲- ثابت کنید در چند نامساوی مجموع جبری طرفهای کوچکتر کوچکتر است از مجموع جبری طرفهای بزرگتر

رسید بک مثال عددی درستی این قضیه را نشان دهید

۱۳- در دو نامساوی چون طرف کوچکتر نامساوی دوم را از طرف بزرگتر نامساوی اول و طرف بزرگتر

نامساوی دوم را از طرف کوچکتر نامساوی اول کم کنیم این دو باقیانده تشکیل یک نامساوی میدهد که جهتش برعکس

نامساوی اولی اول خواهد بود - از روی چند مثال عددی نشان کنید

۱۴- در چند ناساوی که دارای یک جهند و دو طرف آنها مثبت است حاصل ضرب طرفهای بزرگتر

بزرگتر است از حاصل ضرب طرفهای کوچکتر از روی یک مثال عددی درستی این نکته را تحقیق کنید.

۱۵- مخفیین بازیهای قهرمانی المپیک در سال ۷۷۶ پیش از میلاد مسیح شروع شد و تا سال ۳۹۶ پس از میلاد

دوام داشت میدانیم که این بازیها هر چهار سال یکبار تشکیل میشود و نسبت چند بار بازی شده است؟ - دوباره

در سال ۱۸۹۶ پس از میلاد بازیهای قهرمانی المپیک شروع شد بفرض اینکه انقطاعی حادث نشده باشد معلوم

المپیک آخری (۱۹۳۷) که در برلن بوده چندمین آنها است.

۱۶- α کیلوگرم گوشت چکار ریال ارزش دارد قیمت β کیلوگرم آغز احسان کنید (حالتی مخصوص)

$$\alpha = ۵ ; \beta = ۱۶ ; \gamma = ۷ \text{ همچنین } \alpha = ۱۲ ; \beta = ۲۰ ; \gamma = ۳$$

۱۷- کارگری پس از α روز کار چکار ریال فرد گرفته است معلوم کنید پس از ۱۵ روز کار چکار ریال

فرد باید بگشاید؟ (حالتی مخصوص $\alpha = ۱۲$ و $\beta = ۱۲۰$ همچنین $\alpha = ۱۸$ و $\beta = ۱۳۵$)

۱۸- پس از مفصلی پرویز α ریال پیش از خرد است اما پرویز بفتنه ۳ ریال و خسرو بفتنه

۵ ریال پس انداز میکنند معلوم کنید پس از چند بفتنه دیگر هر دو دارای یک مبلغ پس انداز میشوند (در حالتی

$$\text{مخصوص } \alpha = ۱۲۰ ; \alpha = ۸۰ ; \alpha = ۵۲$$

۱۹- اگر نقطه واقع در درون مثلث را به رأس وصل کنیم سه مثلث تشکیل میشود که چون مساحت آنها

$$S_1 \text{ و } S_2 \text{ و } S_3 \text{ فرض کنیم این دستور حاصل میشود } S = S_1 + S_2 + S_3$$

(S مساحت مثلث مفروض است) برای S_1 و S_2 و S_3 اندازهای جبری مثبت و منفی و نظر بگیرید

بطوریکه این دستور برای وقتی که نقطه بیرون مثلث باشد نیز صدق کند.

۲۰- همین سطر را حل کنید وقتی که شکل چهار ضلعی باشد.

۲۱- فاصله ایرج و پرویز d قدم است ایرج هر دقیقه α قدم می‌دود و پرویز دقیقه دو قدم می‌نهد
اگر هر دو یک‌باره و در یک‌طور یکدیگر پرویز برای گرفتن ایرج حرکت کند (یعنی هر دو یک‌جا نبوده) معلوم کنید پس از
۳ دقیقه و پس از ۵ دقیقه فاصله آنها چقدر می‌شود. (فرض میکنیم قدم‌های ایرج و پرویز یک‌سان باشد)

۲۲- در مسئله پیش اگر $d = ۱۴$ قدم باشد پس از ۱۵ دقیقه فاصله آنها چقدر می‌شود. جواب عددی است

منفی معنای آن چیست؟

۲۳- در مسئله پیش وقتی که فاصله d قدم است معین کنید پس از چند دقیقه پرویز ایرج را بگیرد؟

(حالت‌های مخصوص: $d = ۱۸$; $d = ۴۸$; $d = ۶۰$)

ز- توان

۵- توان m اُم عدد جبری α عبارتست از حاصل ضرب m عدد مساوی α

و آنرا چنین می‌نویسند α^m (می‌خوانند α بنوان m)

$$\alpha^m = \overbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \alpha}^m$$

α را پایه و m را که عدد صحیح مثبتی است نما خوانند چنانکه توان پنجم α^5 چنین است

$$(-2)^5 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 \times -2 = -32$$

و توان ششم $+5$ چنین می‌شود

$$(+5)^2 = +5 \times +5 = +125$$

و توان چهارم -3 چنین است

$$(-۳)^۴ = -۳ \times -۳ \times -۳ \times -۳ = +۸۱$$

توان دوم و سوم یک عدد را به ترتیب مربع و مکعب آند و مانند چنانکه مربع ۲ عدد ۴ است و مکعب ۲ عدد ۸ است

پیش پای ساده

توان پای زیر را حساب کنید

$۲^۲$	$(-۲)^۲$	$(-۲)^۴$	$(+۵)^۲$
$(-۵)^۳$	$(-۵)^۴$	$(-۱)^۴$	$(-۱)^۵$
$(-۱)^۶$	$(-۱)^۸$	$(+۱)^۲$	$(+۱)^۸$
$(-۸)^۴$	$(-۶)^۲$	۲	۸

نوع - چون توان حالت مخصوصی از ضربت پس بنا بر قاعده نشانه ها (نمره ۶۴) چنین است

داشت:

اگر عددی مثبت باشد توان m ام آن عدد نیز مثبت است
و اگر ماه منفی باشد توان m ام آن مثبت است مگرگاه m جفت باشد
و منفی است اگر m تاق باشد

$$(+۳)^۴ = (-۳)^۴ = +۸۱$$

چنانکه

$$(-۲)^۲ = -۸$$

یادآوری - باید دانست که m و n با یکدیگر تفاوت نکلی دارند زیرا اعدادی هستند

از حاصل جمع m عددهای α و دومی عبارت از حاصل ضرب m سازه مساوی α میباشد.

$$(-۴) \cdot ۳ = (-۴) + (-۴) + (-۴) = -۱۲ \quad \text{چنانکه}$$

$$(-۴)^۲ = (-۴) \cdot (-۴) \cdot (-۴) = -۶۴ \quad \text{و}$$

۶۷- برای جمع و تفریق و ضرب و تقسیم چند توان قاعده کلی نیست که هر یک از آنها را حساب کرده اند.

قاعده های پیشین عمل میکنند

$$(-۲)^۲ + (+۳)^۲ = (-۱) + (+۹) = +۸ \quad \text{چنانکه}$$

$$(-۲)^۳ - (+۳)^۲ = (-۸) - (+۹) = -۱۷ \quad \text{و}$$

$$(-۲)^۳ \times (+۳)^۲ = (-۸) \times (+۹) = -۷۲ \quad \text{و}$$

$$(-۲)^۲ : (+۳)^۲ = (-۱) : (+۹) = -\frac{۱}{۹}$$

پیشین های ساده

حاصل عملهای زیر را بدست آورید

$$(-۵)^۲ + (-۳)^۳ \quad (-۲)^۲ - (-۴)^۳$$

$$-۳^۲ - ۲^۳ \quad (-۱)^۳ - (-۱)^۴$$

$$(-۴)^۲ \times (-۳)^۲ \quad (-۴)^۲ (-۲)^۳$$

$$(-۱)^۳ \cdot (-۲)^۲ \cdot (-۳) \quad (-۵)(-۱)^۳(-۳)$$

$$(-۲)^۴ : (-۳)^۲ \quad (-۵)^۳ : (-۱)^۲$$

$$(-۳)^۴ : (-۲)^۲ \quad (-۵)^۴ : (-۲)^۳$$

$$(-5)^2 \cdot (-5) \qquad (-3)^2 \cdot (-3)^2$$

$$(-8)^2 : (-8) \qquad (-4)^2 : (-4)^2$$

$$(-2)^2 \cdot (-2)^2 \qquad 4^2 \times (-4)^2$$

۶۸- حالت‌های مخصوص - نخست - حاصل ضرب چند توان که دارای یک پایه باشند توان نیست ارای همان پایه که نمای آن مجموع نمای آنچند توان باشد

$$a^2 \times a^3 = a \cdot a \times a \cdot a \cdot a = a^{2+3} = a^5$$

$$(-2)^2 (-2)^3 = (-2)^5 = -32 \quad \text{چنانکه}$$

$$(-5)^2 (-5)^4 = (-5)^6 = 15625$$

دوم - حاصل ضرب چند توان که دارای یک نما باشند توان نیست که پایه آن حاصل ضرب پایه ها و نمای آن یکی از نماها باشد

$$(-3)^2 (-4)^2 = (-3)(-3) \times (-4)(-4) \quad \text{چنانکه}$$

$$= [(-3)(-4)] [(-3)(-4)]$$

$$= [(-3)(-4)]^2 = 12^2 = 144$$

$$x^a y^a z^a = (xyz)^a$$

و بطور کلی

سوم - خارج قسمت دو توان که دارای یک پایه باشند توان نیست دارای همان پایه و نمایی مساوی تفاضل نمای مقسوم علیه از نمای مقسوم

مثال ۱-

$$(-3)^3 : (-3)^2 = \frac{(-3)(-3)(-3)}{(-3)(-3)}$$

چون مقسوم و مقسوم علیه را دو بار بر ۳ تقسیم کنیم خارج قسمت مساوی $\frac{(-3)(-3)}{1}$ و یا $(-3)^2$ که مساوی $(-3)^{4-2}$ است میشود

و بطور کلی در تقسیم a^m بر a^n اگر $n < m$ باشد خواهیم داشت

$$(A) \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

مثال ۲-

$$(-4)^3 : (-4)^2 = \frac{(-4)^3}{(-4)^2} = -4$$

از روی دستور (۱) این خارج قسمت مساوی $(-4)^1$ میشود پس $(-4)^1 = -4$

$$a^1 = a \quad \text{یا بطور کلی}$$

یعنی: توان نخست هر عدد خود آن عدد است

مثال ۳-

$$(-3)^2 : (-3)^2 = 1$$

اگر دستور (۱) را درین مثال که نامساوی هستند بکار ببریم خارج قسمت مساوی $(-3)^0$

میشود از طرف دیگر این خارج قسمت مساوی $+1$ است بنابراین برای اینکه دستور (۱) را در حالت

$m = n$ نیز عمومیت دهیم قرار داد می کنیم که:

توان صفر هر عدد $+1$ است یعنی $a^0 = +1$

مثال ۴-

$$(-5)^2 : (-5)^4 = \frac{(-5)^2}{(-5)^4}$$

که چون مقسوم و مقسوم علیه را دو بار بر ۵- تقسیم کنیم خارج قسمت مساوی $\frac{1}{(-5)^2}$ است میشود

چون موافق دستور (۱) عمل کنیم خارج قسمت بلا مساوی $(-5)^{-2}$ و یا $(-5)^{-2}$ میشود

در اینجا نمای منفی میرسیم - برای اینکه دستور (۱) کلی باشد میتوان چنین نوشت

$$(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2}$$

پس قرار بر این میگذاریم

توانی که دارای نمای منفی است مساوی عکس توانیست که پایه آن

همان پایه و نمای آن قدر مطلق آن نما باشد

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

نتیجه - با قرار داد های بالا همیشه میتوان نوشت

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

که در آن m و n دو عدد درست بوده و ممکن است $n > m$ و یا $n < m$ و یا

$m = n$ باشد

پیشش های ساده

عمل های زیر را انجام دهید :

$2^2 \cdot 2$	$5^2 \cdot 5^2$	$(-2)^2(-2)^{-1}$
$(-2)^3 \cdot (-2)^1$	$3^2 \cdot 2^2$	$(-1)^{-1}(-2)^{-1}$
$5^0 \cdot (-2)^0$	$x^0 y^0$	$x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
$y^{-2} \cdot y^3$	$5^a \cdot 2^a$	$2^2 : 2^2$
$4^{-2} : 4^{-2}$	$(-7)^1 : (-7)^2$	$(-2)^0 : (-5)^0$
$a^b : a^{-b}$	$x^2 : x^0$	$x^0 : x^2$
$a^1 : a^0$	$2^a : 2^{2a}$	$(-x)^2 : x^{-2}$

۶۹- تبصره- میتوان $\frac{1}{b}$ را b^{-1} نوشت و بنابراین

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$$

و بدین ترتیب تقسیم دو عدد را بصورت ضرب می نویسیم

فست

۷۰- هرگاه بخوانیم توان m ام a را بتوان هر برسانیم که

را بتوان حاصل ضرب m برسانیم

$$(a^m)^n = a^{mn} \quad \text{یعنی}$$

$$(x^2)^3 = xx \times xx \times xx = x^6 \quad \text{زیرا مثلاً}$$

$$(x^a)^b = (x^b)^a \quad \text{و} \quad (x^2)^3 = (x^3)^2 \quad \text{تبصره- نابراین}$$

$$\left(\frac{1}{a^2}\right)^3 = (a^{-2})^3 = a^{-6} = \frac{1}{a^6}$$

۷۱- توان m ام خارج قسمت دو عدد جبری مساوی خارج قسمت

توان m ام آند و عدد است

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad \text{یعنی}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = (a \cdot b^{-1})^m = a^m \cdot b^{-m} \quad \text{زیرا}$$

$$= a^m \cdot \frac{1}{b^m} = \frac{a^m}{b^m}$$

$$\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = \frac{(-4)^2}{2^2} = -1 \quad \text{چون}$$

پیش‌ش‌نامی ساده

۱- تقسیمهای زیر را بصورت ضرب بنویسید

$$\frac{2}{3} \quad \frac{-7}{5} \quad \frac{2}{-4} \quad = \frac{a}{x}$$

$$\frac{-b}{x} \quad \frac{-2}{-5} \quad \frac{-y}{-x} \quad \frac{y}{a^2}$$

۲- عملهای زیر را انجام دهید

$$(5^2)^2 \quad (-2^2)^2 \quad (-1^2)^5 \quad (-1^5)^6$$

$$(x^0)^m \quad [(-b)^5]^0 \quad (2^{-2})^2$$

$$[(-2)(-3)]^2 \quad [(-2)^2 \cdot (-3)]^{-1}$$

$$\left(\frac{-2}{-3}\right)^2 \quad (ab^2)^2 \quad \left(\frac{3}{-4}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{a}{-b}\right)^{-1} \quad \left(\frac{-5}{x}\right)^0 \quad \left(\frac{-5^2}{-3^3}\right)^{-1}$$

ج- ریشه اعداد جبری

۷۲- ریشه n ام عدد جبری a عددی است درست بزرگتر از صفر عددی است

مانند $\sqrt[n]{a}$ بعضی که چون آنرا بتوان n رسانیم عدد a بدست آید و آنرا بدین شکل نویسند $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$$a^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

بنا بر تعریف

نشانه $\sqrt[n]{a}$ را ریشه n و عدد n را شماره ریشه نامیم

ریشه دوم a یعنی \sqrt{a} را اغلب چنین نویسند \sqrt{a} (یعنی بدون شماره ریشه)

۷۳- چون توان جفت هر عدد جبری عددیست مثبت (مؤثره ۶۶) بنابراین:

اولاً هیچ عددی نمیتوان یافت که بتواند ریشه جفت عدد منفی باشد

چنانکه عبارتهای $\sqrt{-1}$ (ریشه دوم -۱) و $\sqrt{-5}$ (ریشه چهارم -۵)

بدون معنی میباشد

ثانیاً هر عدد مثبت دارای دو ریشه n ام است وقتی که n جفت باشد و این دو ریشه قرینه یکدیگرند

چنانکه عدد ۸۱ دارای دو ریشه دوم است $+9$ و -9 : $(\pm 9)^2 = 81$

گوئیم ریشه دوم ۸۱ مساویست با علاوه یا منهای ۹

و همچنین عدد ۸۱ دارای دو ریشه چهارم $+3$ و -3 میباشد : $(\pm 3)^4 = 81$

ثالثاً هر عدد جبری (خواه مثبت یا منفی) دارای یک ریشه از شماره

فرد است

چنانکه ۸- یک ریشه سوم دارد مساوی -2 : $\sqrt[3]{-8} = -2$

و همچنین ریشه پنجم ۳۲ عدد ۲ است : $\sqrt[5]{32} = 2$

در کلیه حالتها $\sqrt[n]{a} = 0$ (در جفت یا ناق)

۷۴- از اینجا و از آنچه در توان عدد های جبری گفتیم نتیجه میشود:

۱- شرط لازم و کافی برای اینکه دو عدد جبری مساوی باشند اینست که توان ناق یا ریشه ناق آن دو

مساوی باشند

۲- شرط لازم و کافی برای اینکه دو عدد جبری بهم نشانه (هر دو مثبت یا هر دو منفی) مساوی باشند

این است که توان جفت یا (اگر مثبت باشند) ریشه های جفت آن دو عدد مساوی باشند

این نتیجه را میتوان مثلاً برای نشان دادن تساوی دو عدد که ظاهراً مختلف باشند بکاربرد

مثلاً میخواهیم ثابت کنیم که دو عدد $\sqrt{48}$ و $4\sqrt{3}$ مساویند چون هر دو مثبت باشند کافی است

ثابت کنیم توانهای دوم آنها یکی است توان دوم اولی ۴۸ و توان دوم دومی چنین است

$$(4\sqrt{3})^2 = 4^2 \times (\sqrt{3})^2 = 16 \times 3 = 48$$

۷۵- ضرب ریشه ها - حاصل ضرب ریشه های چند عدد که دارای

یک شماره باشند مساویست با ریشه حاصل ضرب همان چند عدد همان

شماره

یعنی مثلاً $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$

زیرا چون دو طرف را بتوان m رسانیم میشود

$$a \cdot b \cdot c = abc$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$$

پس

$$\sqrt{-۳} \cdot \sqrt{۹} = \sqrt{-۲۷} = -۳$$

۱۶- خارج قسمت دو ریشه - خارج قسمت ریشه m ام دو عدد مساویست با ریشه m ام خارج قسمت آن دو عدد

$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}} \quad \text{یعنی مثلاً}$$

زیرا چون دو طرف را بتوان m رسانیم درستی این تساوی معلوم میشود

$$\sqrt{۸} : \sqrt{۲} = \sqrt{\frac{۸}{۲}} = \sqrt{۴} = ۲ \quad \text{پس}$$

$$\sqrt[۵]{-۹} : \sqrt[۵]{۸۱} = \sqrt[۵]{\frac{-۹}{۸۱}} = \sqrt[۵]{-\frac{۱}{۹}}$$

پرشش های ساده

حاصل ضرب و خارج قسمتهای زیر را بدست آورید:

$$\sqrt{۴} \cdot \sqrt{۳} \quad \sqrt{-۲} \cdot \sqrt{-۴} \quad \sqrt{-۲} \cdot \sqrt{-۸}$$

$$\sqrt[۴]{۴} \cdot \sqrt[۴]{-۱۶} \quad \sqrt[۵]{۱۶} \cdot \sqrt[۵]{-۲} \quad \sqrt[۳]{-۵} \cdot \sqrt[۳]{-۵}$$

$$\sqrt{۲۰} : \sqrt{۵} \quad \sqrt{۲} : \sqrt{-۸۱} \quad \sqrt[۴]{۸} : \sqrt[۴]{۲}$$

$$\sqrt{-۲۴} : \sqrt{-۴} \quad \sqrt[۵]{۶۴} \cdot \sqrt[۵]{-۲} \quad \sqrt[۳]{x^{۱۵}} : \sqrt[۳]{x^۲}$$

۷۷- مکرر قاعده های بالا نیز درست است یعنی:

اولاً ریشه m ام حاصل ضرب چند عدد مساوی حاصل ضرب ریشه m ام هر یک از آنهاست

$$\sqrt[m]{abc} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c}$$

بنابراین

$$\sqrt[2]{12} = \sqrt{1 \times 12} = \sqrt{1} \cdot \sqrt{12} = 1\sqrt{12}$$

$$\sqrt[4]{a^2} = \sqrt[4]{a^2 \cdot a^2} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{a^2} = a\sqrt[4]{a^2}$$

مثلاً ریشه m ام خارج قسمت دو عدد مساوی خارج قسمت ریشه m ام آنها است

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

یعنی

$$\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

بنابراین

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{27}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$$

پیشش های ساده

ریشه های زیر را ساده کنید:

$$\sqrt{1}$$

$$\sqrt{27}$$

$$\sqrt{125}$$

$$\sqrt{45}$$

$$\sqrt[3]{11}$$

$$\sqrt[3]{-16}$$

$$\sqrt[3]{54}$$

$$\sqrt[5]{-64}$$

$$\sqrt{\frac{2}{11}}$$

$$\sqrt{\frac{11}{27}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{27}}$$

$$\sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{16}{27}}$$

$$\sqrt[3]{-\frac{54}{125}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{64}{125}}$$

$$\sqrt[5]{-\frac{6}{25}}$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را حساب کنید

$$(4 - \frac{3}{4}) : (\frac{1}{4})$$

$$(-4)(+\frac{3}{5}) :$$

$$\left(۲ + \frac{۲}{۵} + \frac{-۱}{۱۵} \right) (-۳) + \frac{-۲}{۱۱} + \left(۹ - \frac{-۶}{۵} \right) : \frac{۱۵}{۱۳}$$

$$۲ \left(۳ - \frac{۵}{۲} + \frac{۱۱}{۳۸} \right) \left(\frac{-۴۹}{۲۴} \right) - (۱۰ - ۴ - \frac{۶}{۵} + ۲) : \frac{۴۵}{۱}$$

۲- مطلوبت محاسبه عبارت

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) : \left(1 + \frac{a+b}{a-b} \right)$$

در حالت های زیر

$$a=۱ ; b=۲ , a=۲ ; b=۳ و a=-۶ ; b=۵ , a=-۱۰ ; b=-۱۵$$

۲- حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

$$۳^۲ - (-۲)^۲ ; ۳^۲ + (-۲)^۳ ; (-۱)^۲ + (-۱)^۳ - (-۲)^۱$$

$$(-۳)^۲ + ۲ \cdot ۳ \cdot (-۴) : (-۴)^۲$$

$$\left[(-۵)(+۲)(-۳) : (-۲) \right]^۲$$

$$(-۵)^۲ + ۳(-۵)^۲(+۴) + ۳(-۵)(-۴)^۲ - ۳^۲$$

۴- عبارت های زیر را حساب کنید و قسید $x = -۳$ و $y = ۲$ باشد

$$x^۲ ; x^۳ ; y^۲ ; ۵xy$$

$$x^۲ \pm y^۲ , x^۲ \pm y^۳ ; x^۲ - y^۲ ; \pm ۲xy + y^۲$$

$$x^۲ - ۲xy + ۲xy^۲ - y^۲ , (x+y)(x-y)^۲ ; (x^۲ - y^۲)^۲$$

۵- عبارت $\frac{(۲a+b)(a-۲b)}{۲ab}$ را در حالت های زیر حساب کنید:

$$a=۱ ; b=-۱ و a=-۲ ; b=۶ , a=-۴ ; b=-۱$$

۶- در تساویهای $2x^2 - 20x + 50 = 0$ و $x^2 + 12 = 7x$

و $x^2 + x = 12$

بجای x اعداد ± 5 و ± 3 و ± 4 و -1 و $\frac{1}{4}$ را

گذاشته نشان دهید دراز کدام اعداد تساوی برقرار خواهد بود

۷- مطلوبست محاسبه عبارت های زیر:

$$\sqrt{(-4) \times 5 \times (-3) + 21} \quad \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{-3} : (-3)$$

$$\sqrt[3]{6(-4) + (-6)9 - 4}$$

$$(-3) \sqrt[3]{(-4)(-3) - 2} \cdot \sqrt[3]{100} : \sqrt[3]{-27}$$

۸- عبارت های زیر را با اعداد $a=16$; $b=27$; $c=24$ حساب کنید

$$\sqrt{\frac{2b}{a}} - \sqrt{\frac{b}{9c}} + \sqrt{\frac{b}{12a}}$$

$$\sqrt[3]{4a} - \sqrt{\frac{25}{12b}} + \sqrt{\frac{a}{12b}}$$

$$\sqrt{\frac{2a}{12c}} - \sqrt{\frac{9b}{12c}} + \sqrt{\frac{a}{12c}}$$

$$\frac{2}{1}a - \sqrt{\frac{4a}{12b}} - \sqrt{\frac{4ab}{b^2}}$$

۹- عبارت های زیر را حساب کنید وقتی که $a=-4$; $b=-3$

و $c=2$; $x=-1$; $y=-3$; $z=1$ باشد

$$\sqrt[3]{b^2c^2} + \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\sqrt{a^2+b^2+12cx^2}$$

$$\sqrt{2x^2 - 2bc - b^2} : \sqrt{a^2 + 4b}$$

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x - y - z)} : \sqrt{-2x - 2y + z}$$

۱۰- میدانیم رای که جسمی در موقع افتادن می پماید از دستور $e = \frac{1}{4}gt^2$ بدست میاید که در آن

e درازای راه و g تقریباً مساوی ۹٫۸۱ متر و ثانیه ثانیه ثانیست که جسم در حرکت است - حال اگر بلند

برجی سی و پنج متر باشد معلوم کنید چند ثانیه طول میکشد تا سنگی که از بالای آن رها شده به پای برج برسد؟

۱۱- زمینی است به شکل مستطیل که درازای آن ۲۵٫۳۲ متر و پهنایش ۱۳٫۷۵ متر است میخواهیم آنرا

با زمینش به شکل مربع که مساحتش مساوی مساحت آن مستطیل باشد عوض کنیم ضلع این مربع را حساب کنید.

۱۲- زمینی است به شکل مثلث متساوی الاضلاع که درازای هر ضلعش ۲۵٫۷۵ متر است ارتفاع آن

مثلث را تا $\frac{1}{3}$ متر تقریب حساب کنید.

۱۳- پهن S و V ترتیب سطح و حجم یک کره این رابطه برقرار است $V = \frac{4}{3}\pi S^{\frac{3}{2}}$ اگر سطح آن

کره مساوی ۷۲ متر مربع باشد حجم آن چقدر است؟

۱۴- محیط مثلث متساوی الساقین ۱۶ متر است یکی از ساقهای آن ۱۰ متر باشد ارتفاع و مساحت

آنرا حساب کنید.

فصل سوم - عبارتهای جبری بهم چیدهها

الف - عبارتهای جبری

۷۷ - عبارت جبری تشکیل شده است از یک رشته حروف و اعداد که بوسیله نشانههای

جبری بهم پیوسته باشند

$$\text{مانند } \frac{a+b}{1}, \quad 2(a+b) - x, \quad \frac{2}{3} - \sqrt{5a-2b^2}$$

۷۸ - یک جمله - هر عبارتی که بین حروف و اعداد آن عمل جمع و تفریق نباشد یک جمله

یا جمله نامند

$$\text{مانند } 5, \quad \frac{1}{2}a, \quad x, \quad x^2, \quad -2xy, \quad \frac{a\sqrt{2}}{x\sqrt{2}}$$

۷۹ - ضریب - چون علمای این اعداد یک جمله مفروضی را ابرامانایم حاصل آن را

ضریب عددی یک جمله مفروض گویند

$$\text{مثلاً در یک جمله } \frac{2}{3}\sqrt{3} \cdot 5 \cdot x^2 - \frac{2}{3} \text{ حاصل } \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} - \frac{2}{3} \text{ یعنی}$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{1} - \text{ضریب عددی یک جمله مفروض است.}$$

و همچنین در یک جمله های بالا ضریبهای عددی بترتیب عبارتند از ۵ - و $\frac{1}{4}$

$$1, 1, -1, -2, \text{ و } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

و بطور کلی ضریب یک جمله بر حسب یکی از حرفهای آن عبارت از حاصل اعمالی است که بین سایر

حرفها و عدد های یک جمله انجام میشود

پرسش های ساده

ضرب های عددی و همچنین ضرب های یک جمله های زیر را بر حسب حرف x بیان کنید.

$$\begin{array}{cccc} -3x & \frac{1}{3}a^2b & \sqrt{\frac{3}{5}}xy^2 & -x^2y \\ xy^2 & \frac{-2}{\sqrt{2}}a & \frac{-2abc}{3\sqrt{3}} & -\frac{5\sqrt{2}yx}{2a} \end{array}$$

۸. جمله های متشابه - جمله های متشابه جمله های را گویند که تنها در ضرب اختلاف

داشته باشند

مانند 7 و -3 و 5 و همچنین $2\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ و همچنین

$$-5ax^2, 6ax^2, \text{ و } -\frac{\sqrt{2}}{3}ax^2$$

۱۱. جمع جمله های متشابه - روشن است که:

$$2a + 5a = 7a$$

$$xy + 2xy + 1xy = 4xy$$

$$3b^2 + (-4b^2) = -b^2$$

$$3abc + (-abc) + 4abc = 6abc$$

بعلاوه میتوانیم درستی این تساویها را اینطور تحقیق کنیم که بجای حرفها عدد های جبری

بگذاریم به سنجیم که اندازه عددی دو طرف تساویها یکی است

بنابراین برای جمع جمله های متشابه این قاعده را داریم:

۸۲- قاعده- حاصل جمع چند جمله تشابه جمله ایست تشابه با آنها که
ضریبش حاصل جمع ضریبها باشد

$$۶ a^4 + ۴ a^4 = (۶ + ۴) a^4 = ۱۰ a^4 \quad \text{مانند}$$

$$۳ ax + ۲ ax + ۱ ax = (۳ + ۲ + ۱) ax$$

$$= ۶ ax$$

$$xy + (-xy) = (۱ - ۱) xy = ۰$$

تبصره- در بعضی جا که اشتباهی رخ ندهد میتوان عبارتهائی مانند $(x+y)$

و $\sqrt{۷-۳x}$ را یک جمله در نظر گرفت

بنابراین:

$$۶(x+y) + [-۵(x+y)] + (x+y) = ۲(x+y)$$

$$\sqrt{۷-۳x} + (-۲\sqrt{۷-۳x}) + ۳\sqrt{۷-۳x} = ۲\sqrt{۷-۳x}$$

پیشش های ساده

حاصل جارتاهای زیر را پیدا کنید:

$$۵a + ۳a$$

$$-۲۱a + ۷a$$

$$-۳x^2 - ۲x^2$$

$$-xy + ۳xy - ۲xy$$

$$-\frac{۲}{x} + \frac{۷}{x}$$

$$۲\sqrt{y} - ۳\sqrt{y} + \sqrt{y}$$

$$۲(۵-x) + ۳(۵-x)$$

$$2(a + \sqrt{b}) - 4(a + \sqrt{b}) + 2(a + \sqrt{b})$$

۸۳- جمع جمله های غیر متشابه - برای جمع جمله های غیر متشابه آنها را با نشانه های

خود بدنبال هم بنویسند

مثلاً حاصل جمع دو جمله $-2a$ و $3b$ را چنین بنویسند $-2a + 3b$

۸۴- تفریق یک جمله با - چون یک جمله در حکم یک جمله عدیست (بازا بمقدار

عددی حرفها) برای تفریق موافق (منه ۲۸) باید نشانه یک جمله کاسته را تغییر

داده با یک جمله کاهش یاب جمع جبری نمایم

مثلاً برای تفریق $3xy$ - از $7xy$ راه عمل چنین است:

$$7xy - (-3xy) = 7xy + (+3xy) = 10xy$$

$$-5\sqrt{x^2+y^2} - (-2\sqrt{x^2+y^2}) =$$

$$-5\sqrt{x^2+y^2} + (+2\sqrt{x^2+y^2}) = -3\sqrt{x^2+y^2}$$

پرسش های ساده

تفریق های زیر را عمل کنید:

$$2a^2 \quad \text{از} \quad a^2 \qquad 5x^2 \quad \text{از} \quad x^2$$

$$-\frac{3}{2}xy \quad \text{و} \quad \frac{1}{2}xy \qquad -5xy \quad \text{و} \quad -2xy$$

$$-\sqrt{xy^2} \quad \text{و} \quad -\sqrt{xy^2} \qquad -3\sqrt{5x} \quad \text{و} \quad 3\sqrt{5x}$$

$$\frac{-3x^2}{\sqrt{5}} \quad \text{و} \quad \frac{2x^2}{\sqrt{5}} \qquad \frac{1}{5}a\sqrt{x} \quad \text{و} \quad -\frac{1}{3}a\sqrt{x}$$

۱۵- چند جمله - از جمع جبری یک جمله چند جمله تشکیل میشود.

مانند $ax^2 + bx + c$ و $2xy - 2y + 2\sqrt{x} - 1$

۱۶- ساده کردن چند جمله - چون چند جمله مجموع چند یک جمله ایست یعنی در حقیقت

مجموع چند عدد جبری است پس میتوان جای آن یک جمله را را بدلتخواه تغییر داد (مغز ۲۳) بخصوصاً

یک جمله ای متشابه را پهلوی هم نوشت و بجای جمله های متشابه مجموعشان را قرار داد این عمل را

ساده کردن چند جمله نامیم

مثال - چند جمله

$$2 - 2c + 2ab - 4c^2 + 1 + 2ab - 2c + 8ab$$

رایتوان (با قرار دادن جمله های متشابه در داخل پرانتز) چنین نوشت

$$(2 - 2c + 1) + (-4c^2 + 2c^2) + (2ab + 2ab + 8ab)$$

پس از ساده کردن چنین میشود

$$3 - 2c - 2c^2 + 12ab$$

ساده کردن چند جمله را بر حسب یکی از حرفهای آنها :

مثال ۱- چند جمله $ax + bx + 1$ بر حسب حرف x دارای دو جمله متشابه

ax و bx میباشد که مجموعشان $x(a+b)$ است

بنابراین چند جمله بالا پس از ساده کردن چنین میشود

$$(a+b)x + 1$$

مثال ۲- در چند جمله

$$2x^4 + 3x^3 - ax^2 - 2ax^2 + x^3 - 2bx + x$$

علم های مشابه بر حسب حرف x عبارتند از $(2x^4, 3x^3)$ و $(-ax^2, -2ax^2)$

و $(-2bx, x)$ بنابراین عبارت جبری بالا پس از ساده شدن بدینصورت درمیآید

$$(2-a)x^4 + (3-2a)x^3 + x^2 + (-2b+1)x$$

پیشش های ساده

چند جمله های زیر را بر حسب حرف x ساده کنید:

$$2x - x^2 + 2x - 1$$

$$x^2 - 2x^2 + ax^2 - x^2$$

$$x^2y - xy^2 + x^2 - x$$

$$2 - ax + 2x - 1$$

$$x\sqrt{2} - x\sqrt{3} + 1$$

$$x^2\sqrt{2} - x^2 + 1 - x$$

$$2x^2 - \frac{1}{5}x^2 + 2x - a + bx$$

۱۷- مرتب کردن چند جمله بحسب توانهای صعودی یا نزولی بحرف

در نوشتن عبارت چند جمله اغلب بحرف آنرا در نظر گرفته چند جمله را نسبت توانهای آن حرف

مرتب می کنند یعنی طوری بنویسند که درجه آن حرف در جمله های آن چند جمله یا مرتباً نزول کند و یا

تدریجاً نماید در حالت اول گوئیم چند جمله بحسب توانهای آن حرف مرتب شده و در حالت

دوم گفته میشود که بحسب توانهای صعودی آن حرف مرتب شده است .

مثال ۱- چند جمله

$2x^5y^2 - 5x^4y^3 + ax - 2b + x^5y^2$
 و اگر بحسب توانای نزولی x مرتب کنیم چنین نوشته میشود

$-5x^4y^3 + 2x^5y^2 + x^5y^2 + ax - 2b$
 و اگر بحسب توانای صعودی x مرتب شود چنین نوشته میشود

$-5x^4y^3 + 2x^5y^2 + x^5y^2 + ax - 2b$
 نمای x در جمله $-2b$ صفر است زیرا میتوان نوشت

$$-2b = -2bx^0$$

مثال ۲- چند جمله بالا را اگر بترتیب توانای نزولی و صعودی y مرتب کنیم بترتیب

خواهیم داشت

$$ax - 2b + 2x^5y^2 - 5x^4y^3 + x^5y^2$$

نمای y در $-2b$ و ax صفر است یا عبارت دیگر ضریب y^0 در چند جمله فوق

$ax - 2b$ است

۱۱۸- درجه چند جمله نسبت به یک حرف آن و چند جمله کامل و ناقص-

این درجه عبارتست از بزرگترین درجه ای که آن حرف در جمله های آن چند جمله دارد

چنانکه چند جمله بالا نسبت به x از درجه چهارم است نسبت به y از درجه پنجم

و چون این چند جمله نسبت به x شامل تمام درجه های کمتر از ۴ است گوئیم که چند جمله در

چهارم کامل است نسبت به x

ولی چون تمام درجه های پایین تر از ۵ را از سر ندارد (مثلاً جمله ایکه در آن x^2 و x شده اند) و گوئیم چند جمله بالا درجه پنجم ناقص است نسبت به x

مثال - چند جمله کامل درجه اول نسبت به x مثال دو جمله است یک جمله دارای x از درجه اول و یک جمله بدون x (یا دارای x از درجه صفر) پس بصورت کلی $ax + c$ خواهد بود همچنین چند جمله کامل درجه دوم نسبت به x دارای سه جمله است بصورت کلی $Ax^2 + Bx + c$ است

بطور کلی چند جمله کامل از درجه n ام دارای $n + 1$ جمله است.

پریش های ساده

چند جمله ای زیر را مرتب نموده و درجه آنها را بر حسب هر یک از حرف های آنها معلوم نموده و تعیین کنید

به ام یکت کامل که ام یکت ناقصند

$$2x - 3x^2 + y - 1$$

$$2x - y$$

$$ax^2 - 3bx$$

$$ax^2 - 1$$

$$1 - 3x^2 - 2ax$$

$$x^2 + 1 - xy + 2y^2$$

$$xy^2 - y^2x + 1$$

$$x^2y - y + 1$$

$$2y^2 - y + 2xy^2 - 1$$

$$\sqrt{3}x - x\sqrt{5} - y^2\sqrt{3}$$

۱۹- جمع چند جمله ای با یکدیگر - برای جمع چند جمله ای با یکدیگر جمله ای آنها را

سازمانی خودشان بدنبال هم می نویسیم و چند جمله حاصل را مطابق قاعده بالا ساده می کنیم

برای این کار بجای آنکه چند جمله را دنبال هم بنویسیم بهتر این است که:
ابتدا هر یک را ساده کرده بعد بقسمی بنویسیم که جمله های مشابه آنها دسته
بدسته در یک ستون قرار گیرند

مثال - برای جمع $2a - 2b - ac^2$ و $2b + 2ac^2$ صورت عل چنین است:

$$2a - 2b - ac^2$$

$$2b + 2ac^2$$

$$-2a \quad -2ac^2 + 11$$

حاصل جمع $-a - b - 5ac^2 + 11$

چون هر یک از این چند جمله را در حقیقت یکجمله عدیست پس باید مجموع جبری مقدار عددی آنها
(بازا، تمام مقدارهای عددی a و b و c) مساوی مقدار عددی حاصل جمع باشد (بازاربازا)
مقدارهای a و b و c

چنانکه برای تحقیق اگر $a = -2$ و $b = 5$ و $c = -1$ باشد خواهیم داشت

$$2a - 2b - ac^2 = -4 - 10 + 2 = -12$$

$$2b + 2ac^2 = 10 - 2 = 8$$

$$-2a \quad -2ac^2 + 11 = +4 + 12 + 11 = 27$$

$$-a - b - 5ac^2 + 11 = +2 - 5 + 10 + 11 = 18$$

مثال دیگر - حاصل جمع چند جمله‌ای
 $ax + 4x + 3x^2$

یا $cx^2 - 2ax^2 + bx - x + a$ و $4bx - x + a$ را بحسب حرف x بدست آورید

می‌توان آنها را با نشانه‌هایشان در بنال هم نوشته چند جمله حاصل را بر حسب x ساده نمود
 و نیز ممکن است ابتدا بریک از چند جمله‌های بالا را ساده کنیم ازین قرار:

$$(c-2a)x^2 + bx - 1 \quad , \quad (a+4)x + 3x^2$$

$$(4b-1)x + a$$

و برای اینکه چیزی از دست نرفته بهتر است که بریک از چند جمله‌ها را مثلاً بترتیب توانهای صعودی
 x مرتب کرده بعد موافق قاعده بالا عمل نماییم درین صورت خواهیم داشت:

$$(a+4)x + 3x^2$$

$$-1 + bx + (c-2a)x^2$$

$$a + (4b-1)x$$

$$-1 + a + (a+4b+3)x + (c-2a+3)x^2$$

۹۰- تفریق چند جمله - چون هر چند جمله در حقیقت چند جمله عددی است برای تفریق

موافق (مذره ۳۶) باید نشانه جمله‌های کاسته را تغییر داده با جمله‌های کاشش یا

جمع جبری نمود...

مثال ۱- می‌خواهیم $5ac$ را از $1 + 2ac + 3x$ تفریق کنیم طرز عمل بدین قرار

خواهد بود

$$\begin{aligned} 6x + 2ac - 1 - (5ac) &= 6x + 2ac - 1 + (-5ac) \\ &= 6x - 3ac - 1 \end{aligned}$$

مثال ۲- میخواهیم ۱۱- $4x^2 - 2xy + 5y^2 - 7$ را از $7 - 2xy + 5y^2 - 3x^2$ تفریق کنیم جمله های کاسته را تغییر ندهد داده با کاهش یاب جمع میکنیم ازین قرار:

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 2xy + 5y^2 - 7 \\ - 4x^2 + 2xy \quad + 11 \\ \hline -x^2 + 5y^2 + 4 \end{array}$$

همان طور که در جمع گفتیم میتوان بجای حرفه عدد قرار داده دستی عمل را تحقیق نمود

چنانکه اگر $x=2$ و $y=-5$ باشد کاهش یاب ۱۵۰ و کاسته ۱۲۵ و بنا بر این تفاضل ۱۲۵ خواهد بود و اندازه عددی $4 + 5y^2 - x^2$ نیز ۱۲۵ است

تمرین ها

۱- عبارتهای زیر را بحسب حرف x ساده نموده و مرتب کنید:

$$ax + 4x - a$$

$$ax^2 - 2mx + x - 1$$

$$x^3 - 2ax^2 - 6x + 2 - x^2 + x$$

$$x^3 - ax + 6x^2 - 6x + 2x^2 - 5$$

$$2ax^2 - 26x + 5xy - 7ax$$

$$x^2 - mx^2 + (mx - x) + m - 1$$

$$Kx^2 - (x - K)(K - x) + m(K^2 - x^2)$$

۲- جارتهای زیر را ساده نموده ضرایب برابر را

$x = -1$ و $y = -2$ و $z = 1$ دستی عمل را

تفصیل کنید

$$(x^2 + xy - y^2) - (x^2 - yx - y^2) + (xy + x^2 - x^2)$$

$$(x^2 + y^2 - 2xy) + (2x^2 - 4y^2 - 2yx) - (2x^2 - 2x^2 + 2xy)$$

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - z^2\right) - \left(x^2 - \frac{y^2}{4} - z^2\right) - \left(\frac{x^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{4}\right)$$

۳- حاصل جارتهای زیر را بدست آورید:

$$(2a - 2bc + c) - (5a - b + c)$$

$$(2x - 2y + 5) - (2x + 2y - 7)$$

$$-(2\sqrt{r} - 5\sqrt{r} + 7) - (2\sqrt{r} + 5\sqrt{r} + 10)$$

$$-2x^2 - (5y - 2x^2 + 11) - (2x^2 - 2y + 2) + 5x^2$$

$$-(2a^2 + 2b^2) - (a^2 - 2b^2 + 2c^2) + 6a^2 - (2c^2 - 2b^2)$$

$$2ac - (ab + d) - [2ab - 2d - (-d - 2ac + 2ab)] - 2ac$$

$$m^2 - (x - y - m^2) : 2m - [2m^2 - (2x - x - y)]$$

$$B = -5y + 2x + 2z, \quad A = -5x + 2y + 2z \quad \text{بفرض}$$

$$C = -2z + 2x + 2z$$

مطلوبست محاسبه عبارت های $A+B+C$ و $A-B+C$ و $-A+B-C$

$$A+B-C$$

۵- بهر من

$$A = x^5 + x^3 - 11x^2 - 1$$

$$B = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 1$$

$$C = x^5 - 2x^3 + x - 2$$

$$D = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$$

مطلوبست محاسبه $\pm A \pm B \pm C \pm D$ با ترکیب نشانه های مختلف در هر یک از این مثالها بازاء

$x = -2$ درستی عمل را امتحان کنید

۶- معلوم کنید در x سال قبل بسن شخصی چند برده است در صورتیکه در اینم a سال بعدش 52 سال

میشود

۷- ایرج a ریال یکومرت 5 ریال جمشید c ریال پول داشتند فرا گذاشتند که اول ایرج

از پول خود به نفس رفیق خود آنقدر بدهد تا پول آنها دو برابر شود و بعد یکومرت از آنچه که دارد پولهای رفیق خود را

دو برابر کند و پس از آن جمشید هم کار را بنماید معلوم کنید پس از این کار مبلغ پول هر یک چند میشود

۸- چهار نفر مبلغ A ریال را بین قسمین خود تقسیم نمودند اولی a ریال و نیمه باقیانده را بر سر برد

دومی 5 ریال و $\frac{1}{4}$ باقیانده را و سومی c ریال و $\frac{1}{6}$ باقیانده را و آنچه که بماند از آن چهارمی خواهد بود

سید احمد است؟

ب. بهنجی

۹۱- تعریف - بهنجی (مساوی عبارتست از تساوی بین دو عبارت جبری مانند:

$$۲ - ۳ = ۴ - ۵$$

$$x - ۲y = ۲x + y - x - ۳y$$

$$x - ۳ = ۲x$$

$$x - x = ۳$$

$$۲x - y = ۰$$

عبارت طرف چپ نشانی را طرف اول بهنجی عبارت طرف راست آنرا طرف دوم بهنجی می نامیم

مثلاً در بهنجی دوم طرف اول $x - ۲y$ است و بهنجی آخری طرف دوم صفر است

و بهنجی های بالا بهنجی اول یک تساوی عددی است

در بهنجی دوم اگر طرف دوم را ساده کنیم حاصل $x - ۲y$ یعنی عین طرف اول شود

بنابر این هر مقدار بجای x و y قرار دهیم تساوی درست است

هر بهنجی (مانند بهنجی دوم) را که دو طرف آن پس از ساده کردن عین یکدیگر شوند آنجا که

بنابر این در اینجا هر مقدار بجای x و y قرار دهیم تساوی

درست است

معمولاً در اینجا و در اینجا نشانی = را گذاشته اند

در همچندی سوم و دو طرف دو عبارت مختلف میباشند و مساوی نیستند مگر آنکه بجای x یک یا چند مقدار
معینی (درین مثال عدد ۳-) گذاشته شود همچنین است دو همچندی چهارم و پنجم - درین همچندیها
دید میشود که تساوی دو طرف همیشه برقرار نبوده و فقط وقتی برقرار است که بجای بعضی از حرفها مقدار
معینی گذارده شود

مثلاً در همچندی $x - 3 = 7$ دو طرف آن وقتی مساویند که بجای x عدد ۱۰ را قرار دهیم
و همچنین در همچندی $x - x = 2$ تساوی وقتی درست است که بجای x یا ۲ یا ۰
گذارده شود

مقدار یا مقدار ثانی را که بجای بعضی از حرفها باید گذارد تا دو طرف
همچندی با هم مساوی شوند پاسخ یا پانسمای (باریشه ای) همچندی
گویند

عدد ۱۰ در همچندی $x - 3 = 7$ و دو عدد ۱ و ۲ - در همچندی $x - x = 2$ پاسخ
باریشه ای این همچندی هستند

حرفی را که باید پاسخ همچندی را بجای آن گذارد تا دو طرف با هم مساوی شوند مجهول
همچندی سایر مقدار ثانی و طرف را معلوم های همچندی نامیم

مثلاً در همچندی $x - 3 = 7$ حرف x مجهول است

همچنین به ۰ - - - - - اگر a معلوم باشد x مجهول همچندی است

پیش‌های ساده

۱- ثابت کنید که هم‌جندی‌های زیر اتحاد هستند

$$x - a = - (a - x)$$

$$a + 6 = 7 + a - 1$$

$$2x - 1 + x + 1 - 4x = 0$$

$$a + b - x = 2a - 2x + 2b - (a - x + 2b)$$

$$a^2 - (x + 2y - 1) = 2a^2 - 2x - (a^2 - x + 2y) + 1$$

۲- ببینید آیا هر کدام از عدد‌های داخل پرانتز ریشه هم‌جندی دیف خود است یا نه؟

$$x - 3 = 2 \quad (5)$$

$$2y + 5 = 11 \quad (3)$$

$$4 - y = 2 \quad (3)$$

$$4y - 10 = 2 \quad (1)$$

$$2 + t = 6 \quad (2)$$

$$4 - 5a = -10 \quad (-6)$$

$$4 - x^2 = 7 \quad (-1)$$

$$2m^2 - 2 = 0 \quad (\pm 1)$$

$$4 - a^2 = 5 \quad (2)$$

$$x^2 - 2x = 1 \quad (-2)$$

۹۲- هم‌جندی‌های هم‌ارز - دو هم‌جندی را هم‌ارز گویند هرگاه ریشه‌های آن‌ها

آنها مساوی باشد

مانند $2x + 3 = 15$ و $x - 1 = 5$ که ریشه هر دو ۶ است

و دو هم‌جندی $x^2 = 3x - 2$ و $2x^2 + 4 = 6x$ که ریشه‌های آنها ۲ و ۱ است

۹۳- حل همچندی - حل کردن همچندی یعنی یافتن ریشه یارثه های آن .

برای حل کردن همچندی باید آن را بیک عدد همچندیهای هم از آنکه بتدریج هر یک از دیگری ساده تر باشند تبدیل نمود بطوریکه آخرین همچندی جواب را روشن سازد .
برای این مقصود اصل های زیر را که بمناسبت ساده بودن احتیاجی بدین

باید در نظر داشت :

۹۴- اصل ۱- هرگاه با دو طرف همچندی یک مقدار جمع کنیم یا از دو طرف آن یک مقدار کم کنیم ریشه همچندی تغییر نمیکند یعنی همچندی حاصل هم از است با همچندی ^{معین}

مثال - ریشه همچندی $x + 2 = 5$ را پیدا کنید

بنا بر اصل بالا از دو طرف ۲ کم میکنیم نتیجه میشود

$$x + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$x = 3 \quad \text{یعنی} \quad x = 5 - 2$$

و یا

۹۵- نتیجه - اولاً- دو عبارت مساوی و بهم نشانه را میتوان از دو طرف

همچندی حذف نمود

زیرا بنا بر اصل ۱ میتوان این عبارت مساوی را از دو طرف کم کرد چنانکه دو طرف

همچندی $x^2 - 1 - a = 5x + x^2 - 3x - a$ دارای دو جمله x^2 و a و

است میتوان این دو جمله را حذف کرد همچندی بصورت ساده $-3x = 5x - 1$

دریاید

ثانیاً میتوان عبارتی را از یکطرف بهچندی بطرف دیگر برد بشرط اینکه نشانه آن را
 نغیر داد. زیرا مثل این است که آن عبارت را از دو طرف کم کرده باشیم

مثلاً دوچندی $x - \alpha = 2\alpha$ چون α - را طرف دیگر بریم این بهچندی بدست

$$\text{بآید} \quad x = 2\alpha + \alpha \quad \text{و یا} \quad x = 3\alpha$$

$$\text{و همچنین بهچندی} \quad 2x - 1 + x^2 = 2x^2 - 4 \quad \text{باچندی}$$

$$+ 1 - 4 + x^2 = 2x^2 - 2x - 3 \quad \text{و یا} \quad 2x = 2x^2 - x^2 - 2 \quad \text{هم از راست درین}$$

مثال عبارت $x^2 + 1$ - را بطرف دوم بردیم

پرسش های ساده

بهچندی های زیر را حل کنید.

$$x - 1 = 2 \quad 2 + a = 6 \quad y + 2 = 12$$

$$-6 + t = 7 \quad x - 2 = -2 \quad x + 11 = 20$$

$$x + 2 = 2 \quad 2 + k = 0 \quad t - 5 = 1$$

$$-2 + y = -2 \quad 12 = d - 1 \quad 0 = 5 - h$$

۹۶- اصل ۲- چون دو طرف بهچندی را در عددی جبری ضرب

کنیم بهچندی که حاصل میشود با بهچندی مفروض هم ارز است

مثال- ریشه بهچندی $\frac{x}{3} = 2$ را تعیین کنید

بنا بر اصل ۲ دو طرف را در ۳ ضرب میکنیم نتیجه میشود

$$x = 6$$

پرسش های شفاهی

ریشه سوم، بجمدی را بدست آورید:

$$\frac{x}{3} = 1$$

$$\frac{a}{5} = 1$$

$$\frac{y}{4} = 10$$

$$\frac{x}{2} = -6$$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{5} = -\frac{1}{5}$$

$$-1 = \frac{x}{7}$$

$$-\frac{1}{4} = \frac{y}{1}$$

$$\frac{4}{2} = -2$$

$$-\frac{1}{5} = \frac{m}{10}$$

$$-\frac{y}{4} = -\frac{1}{1}$$

$$-\frac{5}{2} = -\frac{x}{9}$$

۹۷- اصل ۳- هرگاه دو طرف بجمدی را در یکدجبری (بحر صفر)

تقسیم کنیم ریشه بجمدی تغییر نمی کند

مثال - بجمدی $x = 10$ را حل کنید

بنا بر اصل ۳ میتوان دو طرف را بر ۵ تقسیم نمود نتیجه میشود

$$x = 2$$

پرسش های شفاهی

بجمدی های زیر را حل کنید

$$6x = 12$$

$$-3x = 15$$

$$56 = -14x$$

$$1a = 24$$

$$-3 = 2m$$

$$11 = 5y$$

$$2b = -21$$

$$12y = 11$$

$$-125 = -25x$$

$$5x = -2$$

$$-2x = 24$$

$$-13y = -26$$

مثال ۱- بچندی زیر را حل کنید

$$5x - 2 = 2x + 2$$

بنا بر اصل ۱ از دو طرف $2x$ تفریق می کنیم نتیجه میشود

$$3x - 2 = 2$$

بعد ۲ یک بر دو طرف می افزایم (و یا آنکه ۲ را بطرف دوم میبریم موافق نتیجه ۲ نمره ۱۹۵)

$$3x = 4$$

حاصل میشود
حال دو طرف را بر ۳ تقسیم میکنیم (موافق اصل ۲) نتیجه میشود

$$x = \frac{4}{3}$$

مثال ۲- این بچندی را حل کنید

$$\frac{2x}{5} - 2 = x + 4$$

اول جمله متشابه ۲- و ۴+ دو طرف را ساده میکنیم یعنی بنا بر اصل اول ۲- را بطرف دوم

$$\frac{2x}{5} = x + 6$$

میبریم حاصل میشود

بنا بر اصل ۲ دو طرف را در ۵ ضرب می کنیم این بچندی بدست میآید

$$2x = 5x + 30$$

بعد $5x$ را بطرف اول میبریم (باید نشانه آنرا تغییر داد) نتیجه میشود

$$-3x = 30$$

باین ترتیب یکطرف فقط دارای مجهول طرف دیگر فقط دارای مقدار معلوم شده است حال اگر دو طرف را برضرب مجهول تقسیم کنیم مقدار مجهول بدست میاید:

$$x = -15$$

پرسش های شفاهی

پنجدهای زیر را حل کنید:

$$\frac{2c}{3} = 6$$

$$3x - 7 = 2$$

$$8k + 2 = 10$$

$$2x + 2 = 0$$

$$8k = 16 + 2k$$

$$\frac{2x}{5} = 4$$

$$5m - 2 = 12$$

$$2d + 7 = -14$$

$$-6t = -18$$

$$7s - 2 = 12$$

$$2y - 4 = 5$$

$$\frac{4x}{3} = -40$$

۹۸- پنجدهی یک مجهولی درجه اول - هرگاه یک پنجدهی پس از بکار بردن اصلها

بالا بصورت $ax = c$ درآید گویند آن پنجدهی یک مجهولی از درجه اول است (x مجهول و c و c معلومهای پنجدهی اند)

۹۹- قاعده برای حل پنجدهیهای یک مجهولی درجه اول - بنابراین

حکمه شد برای حل پنجدهیهای یک مجهولی درجه اول بستر این است که عمل های زیر را منظمآ اجرا نماییم:

نخست - ساده کردن جمله های مشابه در دو طرف پنجدهی (از روی اصل ۱) بقسمتی که

جمله های دو طرف پس از این عمل با هم مشابه نباشند

دوّم - از بین بردن ضرایب مشابه بر سید ضرب و طرف پنجدهی در کوچکته بین مضرب آنها

از روی اصل ۲) اگر همچندی برخ باشد

سوم - بردن جمله های مجهول بیک طرف و معلوم را بطرف دیگر از روی اصل ۱)

چهارم - جمع جمیع جبری جمله های هر طرف

پنجم - تقسیم دو طرف بر ضریب مجهول (بنا بر اصل ۳)

عین این قاعده در مثال ۲ از شماره پیش نگار رفته است

مثال - مطلوب است حل $6x - 7 = 3x + 2$ جمله $3x$ را بطرف اول

و -7 را بطرف دوم میسریم نتیجه میشود

$$3x = 9 \quad \text{و یا} \quad 6x - 3x = 2 + 7$$

دو طرف را تقسیم بر ۳ (ضریب مجهول) حاصل میشود $x = 3$

تمرین

بجمله های زیر را حل کنید:

$$2x + 2 = 6 + x$$

$$a + 14 = 2 - 3a$$

$$4z + 2 = 2z$$

$$4t + 3 - t + 5 = t - 10$$

$$5y - 1 = 2y + 5$$

$$4k - 3 = 5k - 16 + 4k - 2$$

$$x - (k - x) = 10$$

$$5x - (3 + 2x) = 9 - 4x$$

$$9x - 22 - 2x = 100 - 11x - 42$$

$$z^2 - y^2 = y^2 - 1$$

$$z^2 - z + 1 = z^2 + z - 10$$

$$2x^2 - 2x + 7 = 2x^2 + 5x - 15$$

$$2x + 29 - 25x = 47 - 20x - 1$$

$$4y + 6 - 2y + 1 = 2y + 2 - 2y - 1 + 5y$$

$$2x - 9 = 1x + 10 = 15 + 5x - 2$$

$$5x + 10 + 1x - 2 + 2x = x - 2$$

$$13 + 12a + 11 - 10a = 10a - 11 - 12a - 12$$

$$2x + 6 - (4 - 7x) = 19x - (11x - 4)$$

$$a^2 - (2a - 2) = 6 - (7 - 2a) + a^2$$

مثال - مطلوبت حل بچندی

$$\frac{2x}{6} - 6 + \frac{2x}{1} + \frac{15}{4} = 14 + \frac{x}{6}$$

پس از ساده کردن جمله های مشابه دو طرف $(\frac{2x}{6})$ و $(\frac{x}{6})$ بچنین ۶- و ۱۴-
نتیجه میشود

$$\frac{x}{6} + \frac{2x}{1} + \frac{15}{4} = 20$$

و طرف این بچندی را در عدد ۲۴ (کوچکترین مضرب برخه نامها) مضرب میکنیم این بچندی بدست میآید

$$4x + 9x + 90 = 480$$

$$x = 30 \quad \text{و از آنجا}$$

$$13x = 390$$

و یا

تعمید بیای زیر را عمل کنید

$$\frac{2a}{5} + \frac{2a}{1} = 19$$

$$\frac{5a}{3} + \frac{2a}{4} - 26.25 = 0$$

$$\frac{x}{3} + \frac{1}{6} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{2y}{3} - \frac{y}{2} + \frac{4y}{5} = 29$$

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 15 - x$$

$$\frac{2x}{3} - 1 = \frac{19x}{11} + \frac{4}{5} - \frac{2x}{4} - \frac{44}{5}$$

$$\frac{2x}{3} - \frac{5x}{12} = \frac{5x}{9} + 6 - \frac{2x}{9}$$

$$y - \frac{2y}{3} + 9 = \frac{2y}{3} + 4 + \frac{5y}{6} - \frac{6y}{5} + \frac{1}{5}$$

$$2x - 2 = 2.25x - 5 - 7.4x + 2.6$$

$$\frac{a}{7} - \frac{a}{3} + \frac{a}{4} - \frac{a}{6} + \frac{a}{8} + \frac{a}{12} = 11$$

$$b = 1 + \frac{b}{2} + \frac{b}{3} + \frac{b}{4} + \frac{b}{5} + \frac{b}{6} + \frac{b}{7}$$

۷ - ضرب عبارتهای جبری

۱۰۰ - فرض کنیم مقصود بدست آوردن حاصل ضرب یکجمله $5a^2b^3c^4$ در یک جمله

$5a^2b^3c^4$ - باشد این حاصل ضرب را میتوان نوشت $5a^2b^3c^4 \times 3$ - چون هر یک جمله

تشکیل شده است از حاصل ضرب چند سازه بنا بر این حاصل ضرب مساویست با حاصل ضرب

سازه های آنها در یکدیگر یعنی:

$$- 2a^2b^3c^4 \times 5a^2c = - 2 \times a^2 \times b^3 \times 5 \times a^2 \times c$$

و چون میتوان در حاصل ضرب چند سازه جای آنها را به نحو تعیین کرد پس این حاصل ضرب را میتوان چنین نوشت:

$$-۳ \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \times ۵ \overset{۳}{a} \overset{۴}{c} = -۳ \times ۵ \times \overset{۱}{a} \times \overset{۳}{a} \times \overset{۲}{b} \times \overset{۴}{c}$$

$$-۳ \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \times ۵ \overset{۳}{a} \overset{۴}{c} = -۱۵ \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \overset{۳}{a} \overset{۴}{c}$$

و یا بنا بر ضرب توانها روشن است که این تساوی بازاء هر عدد که بجای حرف ها گذارد شود درست است

$$۲ \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \times ۳ \overset{۳}{a} \overset{۴}{b} \overset{۵}{x} = ۶ \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \overset{۳}{x}$$

بمنظور

$$۲ \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \times (-۳ \overset{۳}{a} \overset{۴}{b} \overset{۵}{x}) = -۶ \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \overset{۳}{x}$$

$$-۲ \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \times ۳ \overset{۳}{a} \overset{۴}{b} \overset{۵}{x} = -۶ \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \overset{۳}{x}$$

$$-۲ \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \times (-۳ \overset{۳}{a} \overset{۴}{b} \overset{۵}{x}) = ۶ \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \overset{۳}{x}$$

یعنی در ضرب دو یا چند یک جمله قاعده نشانه نگار می رود

از بیان بالا قاعده زیر بدست می آید:

۱۰۱- قاعده - حاصل ضرب دو یا چند یک جمله خود یک جمله است که ضریب

حاصل ضرب ضریبهای عددی آن یک جمله ها (باقید نشانه) بوده و تمام حرفهای

آن یک جمله ها را داشته باشد نمای هر یک از این حرفها نمای

مجموع نمای آنهاست که آن حرف در هر یک جمله دارد

$$(-۲ \sqrt{۳} \overset{۱}{a} \overset{۲}{x} \overset{۳}{y}) (-۳ \sqrt{۵} \overset{۴}{b} \overset{۵}{x} \overset{۶}{y}) = ۶ \sqrt{۱۵} \overset{۱}{a} \overset{۲}{b} \overset{۳}{x} \overset{۴}{x} \overset{۵}{y} \overset{۶}{y}$$

مثلاً

حاصل ضرب های زیر را بدست آورید:

$$2a^2(-4ax) \quad 2ax \cdot 2x^2 \quad (-2x)(2x^2)$$

$$(-2\sqrt{3})(-5\sqrt{6}) \quad 5xy(-2xy^2) \quad (-4ax)(2ax^2)$$

$$(-2x)^2 \quad (-2a)^2 \quad 2x^2(-x)^2$$

$$(-2\sqrt{3}x)^2 \quad (-\sqrt{2}xy)^2 \quad (2\sqrt{2})^2(-a)^2$$

$$(-2x)^2(ax)(-5abx^2)$$

۱۰۲- ضرب کجمله در چند جمله - چون بجای حرفها مقدار عددی گذاریم چند جمله

حرفی تبدیل بمجموع جبری چند عدد میشود و یک جمله تبدیل بیک عدد پس برای ضرب کجمله

در چند جمله میتوانیم مانند ضرب یک عدد در مجموع جبری چند عدد (مفروضه ۴۹) عمل کنیم از تقریر:

یک جمله مفروض را در هر یک از جمله های چند جمله ضرب کرده حاصل ضربهای
جزء را با هم جمع می کنیم

$$(2a^2 - 3ax + 4x - 6) \times 2ax = \text{مانند}$$

$$2a^2 \times 2ax + (-3ax) \times 2ax + 4x \times 2ax + (-6) \times 2ax =$$

$$4a^3x - 6a^2x^2 + 8ax^2 - 12ax$$

تمرین

عبارتهای زیر را ساده نموده بازاء $a = -2$ ، $b = -1$ ، $c = 0$

و $x = 1$ ، $y = -4$ درستی را تحقیق کنید

برای نمونه این مثال نقل می‌شود

مثال - بنویسیم عبارت $x'(x-y) - y(-2x'+y)$ را ساده نموده، باز مقدارهای عددی

x و y درستی عمل را تعیین کنیم

راه عمل چنین است :

$$\begin{aligned} x'(x-y) - y(-2x'+y) &= 2x'^2 - 2x'y + 2x'y - y^2 \\ &= 2x'^2 - y^2 \end{aligned}$$

باز $x=1$ و $y=2$ مقدار عددی حاصل $2(1)^2 - (2)^2 = 2 - 4 = -2$

است

و مقدار عددی عبارت مفروض نیز

$$2(1-2) - 2(-2+2) = -2 - 2(0) = -2$$

باشد

$$\begin{aligned} &xy(a-b) - ab(x-y) + bc(a-x) \\ &= a[x(ax-by) - y(bx-ay)] \\ &= a\sqrt{x}(ab-b\sqrt{x}-\sqrt{x}) - ac\sqrt{y}(cy-\sqrt{y}) \\ &= a\sqrt{x}(5a^2-2b\sqrt{x}) - (4a^2-2b\sqrt{x}) \\ &= b[(a-c) - ab(a-b)] \\ &x^2(a+b) - b(a-c) + a(b-x) - c(x-y) \end{aligned}$$

مثال - مطلوبست محاسبه عبارت.

$$P = \sqrt{3} [4\sqrt{12} - 2\sqrt{3} - (\sqrt{75} - \sqrt{48})]$$

ابتدا پرانتز درون کروشه را حذف میکنیم بعد $\sqrt{3}$ را در هر یک از جمله های درون آن ضرب

بنمایم نتیجه میشود

$$P = 4\sqrt{36} - 2\sqrt{9} - \sqrt{225} + \sqrt{144}$$

$$\text{و چون } \sqrt{36} = 6 \text{ و } \sqrt{9} = 3 \text{ و } \sqrt{225} = 15 \text{ و } \sqrt{144} = 12$$

بنابراین

$$P = 24 - 6 - 15 + 12 = 15$$

و نیز درین مثال میتوان پیش از ضرب در $\sqrt{3}$ هر یک از اعداد یکال های درون کروشه را ساده نموده بعد

حاصل کروشه را در $\sqrt{3}$ ضرب کنیم از قیمت اری:

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3} \text{ و } \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

بنابراین عبارت P چنین میشود

$$P = \sqrt{3} (1\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3})$$

$$P = \sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 15$$

تمرین

۱- حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

$$\sqrt{2} (3\sqrt{18} + \sqrt{18} + \sqrt{50} - 2\sqrt{72})$$

$$(2\sqrt{6} - \sqrt{12} - \sqrt{24} + \sqrt{48})\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} (5\sqrt{24} - 4\sqrt{32} + 3\sqrt{50} - 2\sqrt{54})$$

$$4\sqrt{2} (\sqrt{2} + 2\sqrt{18}) - \sqrt{6} (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$$

$$5\sqrt{2} (3\sqrt{2} + 10\sqrt{5}) - 2\sqrt{5} (3\sqrt{2} - 5\sqrt{5})$$

$$2\sqrt{2} [(2\sqrt{2} - 5\sqrt{6}) - (3\sqrt{18} - 4\sqrt{20})]$$

$$4\sqrt{10} [2\sqrt{20} + 3\sqrt{18} - (2\sqrt{18} + 3\sqrt{5})]$$

۲- درآمد ۱۲ روزه شخصی ۵ ریال است و مخارج ۷ روزه او ۳ ریال تعیین کنید و بخواهید

درآمد مدت x روز و وقتیکه $\alpha = ۹۶$ ریال و $\beta = ۲۸$ ریال و $\gamma = ۱۵$ ریال باشد
 و در ادبست آورید

۳- بوسید و مجری آب داخل استخری میشود اولی در هر ساعت ۵ ذرع کعب و دومی در هر

ساعت ۳ ذرع کعب آب داخل آن میکند این استخر دارای زیر آبیت که در هر چهار ساعت ۵ ذرع

کعب آب آنرا خارج مینماید معلوم کنید اگر هر سه یکمرتبه باز باشند در x ساعت چند ذرع کعب آب
 داخل استخر میشود

مثال - مطلوبست حل بحیندی

$$2x(x-1) = 2x^2 + 4x - 1$$

$$2x^2 - 2x = 2x^2 + 4x - 1$$

پس از ضرب نتیجه میشود

و پس از ساده کردن جمله های متشابه و دو طرف این معجزی بدست می آید

$$x = \frac{1}{6} \quad \text{و از آنجا} \quad 6x = 1$$

تمرین

بعضی های زیر را حل کنید :

$$2(x+1) - 4 = 2(x-1) \quad 4(2y-5) + 20 = 2(y+9)$$

$$9x - 2(2x-4) = 2(5-x) + 7$$

$$3y - 9(2y+4) = 2(y+9)$$

$$5(2a-1) - 7a = 2(a+6) - 2$$

$$x - 2(2x-3) - (x+6) = 1 - 7(2-x)$$

$$7(3x-6) + 5(x-2) + 4(12-x) = -11$$

$$2x(x-2) + 5x = x(3x-4) + 6$$

$$2y - (5y - y + 1) = -(2+y) + 15$$

مثال - مطلوبست حل معجزی

$$\frac{5}{6} \left(x - \frac{1}{3} \right) + \frac{7}{6} \left(\frac{x}{5} - \frac{1}{7} \right) = 4 + \frac{1}{9}$$

پس از ضرب نتیجه میشود

$$\frac{5}{6}x - \frac{5}{18} + \frac{7}{30}x - \frac{1}{6} = \frac{44}{9}$$

و دو طرف این معجزی را در عدد ۹۰ که کوچکترین مضرب برخنا می باشد ضرب

میکنیم حاصل میشود

$$۷۵x - ۲۵ + ۲۱x - ۱۵ = ۴۴۰$$

$$۷۵x + ۲۱x = ۴۴۰ + ۲۵ + ۱۵$$

$$۹۶x = ۴۸۰$$

پس از ساده کردن جمله های مشابه نتیجه میشود

$$x = ۴۸۰ : ۹۶ = ۵$$

و از آنجا

مترین

این مجذبی را حل کنید:

$$\frac{1}{x}(27-x) = \frac{9}{x} + \frac{1}{10}(7x-5)$$

$$1 - 3\left(7\frac{1}{x} + x\right) + 7\left(\frac{7x}{x} - \frac{5}{x}\right) + \frac{1x}{x} = 5$$

$$\frac{x-1}{x} - \frac{27-x}{5} = \frac{x+7}{x} - 6$$

$$\frac{1-x}{6} + x - 1 - \frac{7}{x} = \frac{x+7}{x} - \frac{x}{x}$$

$$\frac{5x-2}{x} - \frac{x-1}{6} = \frac{x+17}{x} - 2$$

$$\frac{x-2}{x} - \frac{17-x}{6} = \frac{5x-36}{x} - 1$$

$$\frac{7x-5}{x} - \frac{5x-7}{6} + 2 - \frac{7}{x} = 0$$

$$\frac{7x+1}{x} + \frac{7x-5}{x} = 2 + \frac{7x-1}{15}$$

$$\frac{7x+1}{15} + \frac{7x-5}{x} = \frac{7x-1}{5} + \frac{2-x}{x}$$

$$\frac{7x-1}{10} - \frac{2-x}{x} + \frac{7x+1}{6} = 6 - \frac{1}{6}$$

$$\frac{3-2x}{3} - \frac{4-x}{4} = \frac{3x-2/15}{1/5}$$

$$\frac{5x-7/4}{1/3} + \frac{1/3-2x}{2} = \frac{1/1-8x}{1/2}$$

$$\frac{5a-1/5}{7} - \frac{5(7/4-2a)}{6} = \frac{9a-7/7}{4} - \frac{7a-1/1}{3}$$

$$\frac{4(12a-7/4)}{5} + \frac{3(1/2-a)}{10} = \frac{9a+7/2}{20} + \frac{5+7a+a}{4}$$

۱۰۳- ضرب دو چند جمله - چون بجای حرفها مقدار عددی قرار دهیم چند جمله

حرفی تبدیل بچند جمله عددی میشود بنابراین برای ضرب دو چند جمله میتوان قاعده (نموده ۵)

بکار برد:

۱۰۴- قاعده ضرب دو چند جمله - باید هر یک از جمله های یکی از آنها در کلیه جمله های چند جمله دیگر ضرب نموده حاصل ضربهای جز را جمع جبری نمود.

راه عمل از مثالهای زیر معلوم میشود

مثال ۱- مطلوبست تعیین حاصل ضرب $2x - 5$ در $3x + 2$ مانند

حساب کی ازین دو سازه رازیر سازه دیگر نوشته عمل میکنیم بدین طریق:

$$\begin{array}{r} 2x - 5 \\ 3x + 2 \\ \hline 6x^2 - 15x \quad \dots\dots\dots 3x \quad \text{در} \quad 2x - 5 \\ + 4x - 10 \quad \dots\dots\dots + 2 \quad \text{در} \quad 2x - 5 \\ \hline 6x^2 - 11x - 10 \quad \dots\dots\dots \text{مجموع حاصل ضربهای جز و حاصل ضرب کل} \end{array}$$

برای آسانی عمل چنانکه می بینید بهتر آنستکه در نوشتن حاصل ضربهای جز جمله های مثبت

آسان‌زیر یکدیگر نوشته شود

مثال ۲- عبارت $۲\alpha^۵ - ۷\alpha^۴ + ۳\alpha^۳$ را در عبارت $\alpha^۲ - ۶ - ۵\alpha$

ضرب نموده بازاء $\alpha = ۲$ درستی عمل را امتحان کنید

برای آسانی این عبارت‌ها را بحسب توانهای صعودی یا نزولی α مرتب نموده مانند مثال

عمل میکنیم مثلاً اگر این دو سازه را بحسب توانهای نزولی α مرتب کنیم خواهیم داشت

$$\begin{array}{r} ۲\alpha^۳ + ۳\alpha^۲ - ۴\alpha - ۷ \\ \alpha^۲ - ۵\alpha - ۶ \end{array} \quad \begin{array}{r} = ۱۶ + ۱۲ - ۸ - ۷ = ۱۳ \\ = -۶ - ۱۰ - ۶ = -۱۲ \end{array}$$

$$\hline ۲\alpha^۵ + ۳\alpha^۴ - ۴\alpha^۳ - ۷\alpha^۲ \quad -۱۵۶$$

$$-۱۰\alpha^۴ - ۱۵\alpha^۳ + ۲۰\alpha^۲ + ۳۵\alpha$$

$$-۱۲\alpha^۳ - ۱۸\alpha^۲ + ۲۴\alpha + ۴۲$$

$$\hline ۲\alpha^۵ - ۷\alpha^۴ - ۳۱\alpha^۳ - ۵\alpha^۲ + ۵۹\alpha + ۴۲ \quad \text{حاصل ضرب}$$

که بازاء $\alpha = ۲$ حاصل ضرب چنین میشود

$$۶۴ - ۱۱۲ - ۲۴۸ - ۲۰ + ۱۱۸ + ۴۲ = -۱۵۶$$

ازین و مثال ۱ ده عمل ضرب و چند جمله بدست میآید ازین قرار:

اول و چند جمله را بحسب توانهای نزولی یا صعودی یکی از حرف α مرتب نموده آنها

زیر هم می‌نویسیم (بهتر است که چند جمله کوچکتر یعنی آنکه عده جمله هایش کمتر است زیر چند جمله دیگر نوشته

شود) بعد هر یک از جمله های پائین را در جمله های بالا ضرب میکنیم و این حاصل ضربهای جزوا

هر کدام در یک سطر و زیر یکدیگر مینویسیم که جمله های مشابه در یک ستون قرار گیرد بدین طریق

عمل جمع جمله های مشابه آسان میشود. بعد از جمع جبری جمله های هر ستون حاصل ضرب بدست میآید

قرین

حاصل ضربهای زیر را بدست آورید:

$$2x^2 - 2x - 1$$

،

$$2x - 4$$

$$2y^2 - 1y - 1$$

،

$$y^2 + 2y - 3$$

$$x^2 - x - 5$$

،

$$x^2 - 2x + 4$$

$$2a^2 - 5a^2 + a + 1$$

،

$$5 - a^2 + a$$

$$5x - 2a - (2a - 5x)$$

،

$$5x - 2a + (2a - 5x)$$

$$2a - 4a^2 + 4 + a^2$$

،

$$2 + a^2 - 2a + 2a^2$$

$$(a-b)^2 \cdot (a+b)^2 \cdot (a-b+1)^2$$

$$(x^2 - 2ax + a^2)^2 ; (a-b)^2 ; (a+b)^2$$

$$(xy - xy^2)(xy + xy^2) ; (a-b)(a+b)$$

$$(xy - xy^2)(2xy - 4xy^2)(2xy - xy^2)$$

$$(m^2 + p^2 + q^2 - mp - mq - pq)(m + p + q)$$

مثال - مطلوبست حل یکنجذی

$$(2x - 1)(2x + 5) = (2x + 3)^2 + 2x^2 - 13$$

پس از عمل ضرب نتیجه میشود

$$4x^2 + 12x - 5 = 4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 - 13$$

و چون جذای متضاد و طرف را ساده کنیم حاصل میشود

$$x = 1$$

تمرین

بجذبهای زیر را حل کنید:

$$(x-4)(x+1) = 7 - (2-x)(x+2)$$

$$(a+2)^2 - (a+2) = -17$$

$$(3x-6)(4x-1) = 12x^2 - 96$$

$$(x+2)(x+5) = (x+15)(x-10)$$

$$(2y-2)(2y+4) = (y-1)^2 + 5y^2 - 11$$

$$(x-5)(x+3)(x+2) - 5 = (x^2 - x - 1)(x+1)$$

$$(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4) - (x+2) = (x^2 + 2)^2 + 20$$

د- بخش دو عبارت جبری

۱۰۵- تعریف - غرض از بخش کردن تقسیم کردن عبارت جبری a (بخشی اتمم)

بر عبارت جبری b (بخشی یا مقسوم علیه) پیدا کردن عبارتیت مانند c (بهر یا خارج قسمت) بقسمی که حاصل ضربش در c مساوی a گردد

پس بنا بر تعریف بالا این اتحاد را خواهیم داشت

$$(1) \quad a = bc$$

و چون خارج قسمت α بر $\frac{\alpha}{\phi}$ را میتوان بصورت $\frac{\alpha}{\phi}$ نوشت

پس خواهیم داشت $(۲) \quad c = \frac{\alpha}{\phi}$

یعنی خارج قسمت α بر $\frac{\alpha}{\phi}$ برخه $\frac{\alpha}{\phi}$ است که هرگاه آنرا در بخش یاب (ϕ) ضرب کنیم بخش (α) بدست میآید

بنابر این دوتاوی (۱) و (۲) از یکدیگر نتیجه شده اند

مثال:

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot x &= \Delta x & \text{زیرا} & \quad \Delta x : x = \frac{\Delta x}{x} = \Delta \\ \alpha x \cdot x^2 &= \alpha x^3 & & \quad \alpha x^2 : x^2 = \frac{\alpha x^3}{x^2} = \alpha x \\ -2 \alpha^2 x \cdot \alpha^2 &= -2 \alpha^5 & & \quad -2 \alpha^5 : \alpha^2 = \frac{-2 \alpha^5}{\alpha^2} = -2 \alpha^3 \\ \frac{3}{\phi} x \cdot (-\phi) &= -3 & & \quad -3 : -\phi = \frac{-3}{-\phi} = \frac{3}{\phi} \end{aligned}$$

$$m n p^2 \cdot m^2 p^2 = \frac{m n p^2}{m^2 p^2} = m \cdot n \cdot p^2 = m n p^2 \quad \text{پس چنین}$$

$$m n p \cdot m^2 p^2 = m n p^3 \quad \text{زیرا}$$

$$12 \alpha^2 x y : -5 x^2 y = \frac{12 \alpha^2 x y}{-5 x^2 y} = -\frac{12}{5} \alpha^2 x \quad \text{و}$$

$$-\frac{12}{5} \alpha^2 x \cdot (-5 x^2 y) = 12 \alpha^2 x y \quad \text{زیرا}$$

۱۰۶- برای یافتن ساده ترین عبارت بهر (یعنی ساده ترین عبارت $\frac{\alpha}{\phi}$

مفره ۶) را بکار ببریم که هرگاه بخشی و بخش یاب را در سازه ای ضرب یاب سازه ای تقسیم کنیم بهر تغییر نمی کند

چنانکه بهر $\frac{5x}{2}$ را میتوان بصورت ساده ۵ نوشت (از تقسیم بخشی و بخش یاب بر x)
و همچنین در بخش 25 بر 5 بهر مساویست با 5^2 (از تقسیم کردن بخشی و بخش یاب بر 5)
درین دو بخش می بینیم که ساده ترین صورت بهر عبارتست صحیح.

و در تقسیم 55 بر 5 ساده ترین صورت بهر برخه مساوی $\frac{11}{5}$

و در تقسیم 55 بر 55 بهر $\frac{5x}{55}$ است که بیسج ساده نمیشود

اینک برای بدست آوردن ساده ترین صورت خارج قسمت و عبارت جبری لتهای
زیر را در نظرمی گیریم:

۱۰۷- حالت اول - تقسیم یک جمله بر یکجمله - برای بدست آوردن ساده

ترین عبارت بهر کافیت که بخشی و بخش یاب را بر سازه های مشترک تقسیم کنیم

$$\text{مانند } \frac{-2ax}{a} = -2ax \quad \text{و} \quad \frac{5a^2}{a^2} = 5a \quad \text{و} \quad \frac{-7xy}{-5ax^2} = \frac{7xy}{5ax^2}$$

$$\text{و} \quad \frac{12ax^2}{-18x^3} = -\frac{2a}{3x} \quad \text{ازین چند مثال معلوم میشود:}$$

هرگاه بخشی شامل همه سازه های بخش یاب با نمایی بزرگتر یا مساوی باشد درین صورت بهر

یک جمله درست میشود (مانند دو مثال اول) و در غیر این حالت بهر برخه خواهد بود (مانند

مثالهای سوم و چهارم)

پیرشش های شفاهی

در هر یک از بخش های زیر بجهت را بدست آورید:

$$6 \quad -5^{12} \quad 5^2 \quad 5 \quad 5^5$$

$$\begin{array}{cccc}
 -x^1 & , & -x^2 & , & xy^2 & , & -xy \\
 15ax^2 & , & -3bx^2 & , & -27a^2b^2 & , & -3a^2b^2 \\
 -31xy^2 & , & -4xy^2 & , & -3a^2b^2 & , & -4a^2b^2 \\
 -45a^2xy^1 & , & -9a^2xy & , & -25a^2xy^2 & , & -5a^2xy^2 \\
 2a^2 & , & -3b^2 & , & 5ax^2 & , & -10bx^2 \\
 -3xy & , & -15xy^2 & , & 26x^2ab^2 & , & 22x^2ay
 \end{array}$$

۱۰۸- حالت دوم- تقسیم چند جمله بر یکجمله- بر یک از جمله های بخش را بر بخش یاب تقسیم نمود (موافق مزد پیش) برهای جز را جمع جبری نمودیم
 مثال ۱- در تقسیم $x^3 - x^4$ بر x^2 به چنین است

$$\frac{x^3 - x^4}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} - \frac{x^4}{x^2} = x - x^2$$

بیا

مثال ۲- در تقسیم $12x^3 - 3x^2y + 15xy^2$ بر $3xy$ به چنین است

$$\frac{15xy^2}{-3xy} + \frac{-3x^2y^2}{-3xy} + \frac{12x^3}{-3xy} = -5x + xy - \frac{4x^2}{y}$$

پیش های ششایی

مطلوبست تعیین برهای زیر:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha \quad \frac{x^2 - x^3}{x^2} & , \quad \frac{6x^2 - 4x}{2x} \\
 \beta \quad \frac{10ax - 10ax^2}{-2ax} & , \quad \frac{25xy^2 + 30xy^2}{-5xy}
 \end{array}$$

$$\frac{a(x+y)+b(x+y)}{x+y}, \quad \frac{r(a+b)-r(a,b)^2}{a+b}$$

$$\frac{ra(rx-f)-fa(rx-f)}{rx-f}$$

$$\frac{x-y-r(x-y)}{-r(x-y)}, \quad \frac{\sqrt{3}x^2 - 2\sqrt{3}xy}{\sqrt{3}x}$$

$$\frac{dx - aby}{abc}, \quad \frac{\sqrt{6}(m-2) - \sqrt{3}(m-2)}{\sqrt{3}(m-2)}$$

$$\frac{K(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 - 2K(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{K(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

۱۰۹- حالت سوم - تقسیم چند جمله بر چند جمله - برای تعیین صورت ساده

به درین حالت مانند حساب عمل تقسیم را بجا می آوریم

فرض میکنیم مقصود بخش کردن عدد ۹۹۲ بر ۳۱ باشد صورت عمل چنین است:

$$\begin{array}{r} 31 \overline{) 992} \\ \underline{-92} \\ 62 \\ \underline{-62} \\ 0 \end{array}$$

$$992 = 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 2$$

و چون

$$31 = 3 \times 10 + 1$$

میتوان تقسیم بالا را بدین صورت نوشت

$$\begin{array}{r} 9 \times 10^2 + 9 \times 10 + 2 \quad \left| \begin{array}{l} 3 \times 10 + 1 \\ \hline 3 \times 10 + 2 \end{array} \right. \\ \underline{-9 \times 10^2 - 3 \times 10} \\ + 6 \times 10 + 2 \\ \underline{-6 \times 10 - 2} \\ 0 \end{array}$$

درین تقسیم اگر بجای ۱۰ عدد کلی α را قرار دهیم معلوم میشود که در تقسیم چند جمله $9\alpha^2 + 9\alpha + 2$ بر

$2\alpha + 1$ بهر سادی $2\alpha + 2$ میباشد

صورت عمل چنین است :

$$\begin{array}{r} 9\alpha^2 + 9\alpha + 2 \quad | \quad 2\alpha + 1 \\ - 9\alpha^2 - 2\alpha \\ \hline + 6\alpha + 2 \\ - 6\alpha - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

ازین مثال میتوان قاعده زیر را نتیجه گرفت :

۱۱- قاعده - پس از ساد و کردن چند جمله های مقسوم و مقسوم علیه آنها

نسبت بتوانند خاصای نزولی (یا صعودی) یکی از طرفها مرتب نموده بطریق زیر

عمل مینمائیم :

جمله اول بخشی را بر جمله اول بخش یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله های بخش یاب ضرب می نمائیم و حاصل را از جمله های بخشی میکاهیم تا نخستین مانده بدست آید از نو جمله اول مانده را بر جمله اول بخش یاب قسمت نموده بهر را در تمام جمله های بخش یاب ضرب مینمائیم و حاصل را از جمله های این مانده کم می کنیم تا دومین مانده بدست آید و بهمین طریق عمل را ادامه میدهیم تا به مانده صفر و یا بمانده ای برسیم که درجه اش از درجه بخش یاب کمتر باشد.

مثال ۱- مطلوبست تعیین بهر در تقسیم $2\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 6$ بر $\alpha + 2$

چون چند جمله‌نحشی و بخش‌یاب را بر حسب حرف a مرتب نموده از روی قاعده بالا عمل کنیم نتیجه می‌شود

$$\begin{array}{r|l}
 a^3 + 2ab^2 - b^3 & a+b \\
 -a^3 - ab^2 & a^2 + ab - b^2 \\
 \hline
 ab^2 & \\
 -ab^2 - ab^2 & \\
 \hline
 -ab^2 - b^3 & \\
 +ab^2 + b^3 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

در این بخش‌نحشی بر بخش‌یاب بخش پذیر (قابل قسمت) بوده و می‌توان چنین نوشت

$$a^3 + 2ab^2 - b^3 = (a+b)(a^2 + ab - b^2)$$

مثال ۲- a^3 را بر $a-1$ تقسیم کنید

از روی قاعده بالا راه عمل چنین است

$$\begin{array}{r|l}
 a^3 & a-1 \\
 -a^3 + a^2 & a^2 + a + 1 \\
 \hline
 +a^2 & \\
 -a^2 + a & \\
 \hline
 +a & \\
 -a + 1 & \\
 \hline
 +1 &
 \end{array}$$

درین مثال بهرراکه بصورت $\frac{a^3}{a-1}$ است می‌توان چنین نوشت

$$\frac{a^3}{a-1} = a^2 + a + 1 + \frac{1}{a-1}$$

زیرا اگر دو طرف بهررا در $a-1$ (بخش‌یاب) ضرب کنیم a^3 (بخشی) بدست می‌آید

و بجا می‌آوریم بخشی بر بخشی یاب بخش پذیر نیست بهر معنی $a^2 + a + 1 + \frac{1}{a-1}$

تشکیل شده است از جز درست $\alpha + \alpha + 1$ و جز بخره $\frac{1}{\alpha-1}$ عدد $\alpha + 1$ را مانده این تقسیم گویند.

بتصره - فرض میکنیم Q جز درست بر R مانده تقسیم A بر B باشد بنا بر آنچه گفتیم خواهیم داشت:

$$(1) \quad \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

اگر بخواهیم $R = 0$ باشد تقسیم درست است و خواهیم داشت

$$\frac{A}{B} = Q$$

اگر دو طرف تساوی (۱) را در B ضرب کنیم این تساوی بدست میآید

$$(2) \quad A = BQ + R$$

یعنی بخشی مساویست با مجموع مانده و حاصل ضرب بخش یاب در جز درست

بهر

و در حالتیکه مانده صفر باشد تساوی (۲) نوشته میشود

$$A = BQ$$

یعنی بخشی مساویست با حاصل ضرب بخش یاب در هر

تمرین

در هر یک از تقسیمهای زیر بهر را بدست آورید

$$\alpha + 2$$

بر

$$\alpha^2 + 10\alpha + 24$$

$$\begin{array}{ll}
 x^2 + 1 & , \quad x^2 - 2x - 2 \\
 x - 2 & , \quad x^2 + x - 6 \\
 y + 2 & , \quad y^2 - 11y - 6 \\
 2y - 1 & , \quad 6y^2 + 19y - 7 \\
 2a - b & , \quad 2a^2 + ab - 2b^2 \\
 2x - 2y & , \quad 9x^2 + 6xy - 1y^2 \\
 2a - 2b & , \quad 2a^3 + ab - 2b^3 \\
 2a - 4 & , \quad 2a^3 - 14a^2 + 14a - 12 \\
 2x - 2 & , \quad 27x^3 + 6x^2 - 12x - 12x^2 \\
 y - 3y^2 - 2 & , \quad 2y^4 + 11y^3 - 2y^2 + 17y - 4 \\
 21x^4 - 9xy^3 + 156x^2y^2 + 9xy^2 + 21y^4 & \\
 4x^2 - 10xy & \\
 (4a^2 - 2a - 1) & , \quad (52a + 1 - 52a^2 + 12a^3) \\
 (x^3 + 1) : (x + 2) & , \quad (x^3 - y^3) : (x \pm y) \\
 (27x^3 + 1y^3) : (2x + 2y) & , \quad (x^4 - 16) : (x \pm 4) \\
 (a^5 \pm b^5) : (a \pm b) & , \quad (y^6 \pm 1) : (y \pm 1)
 \end{array}$$

۱۱۱- تجزیه های حرفی - هرگاه در یک تجزیه مقدارهای معلوم بصورت نمایی یعنی

بحر نموده شده باشد تجزیه را به تجزیه حرفی نامند

هر پنج‌دی حریفی درجه اول پس از ازین بردن برخ ناما و ساده کردن جمله های مشابه دو طرف

بصورت کلی $ax = b$ دریايد

برای حل این پنج‌دی یعنی برای تعیین x ریشه آن باید دو طرف را بر a ضرب (x)

تقسیم نمود $(a$ باید مخالف صفر باشد)

مقبصره - از تقسیم دو طرف تساوی $0 \times 7 = 0 \times 5$ بر صفر لازم میاید که $0 = 0$

باشد که محال است

بنابر این نباید بچفت دو طرف یک تساوی را بر صفر تقسیم نمود زیرا علاوه بر اینکه غلط

در تقسیم یکدیگر بر صفر برابر است آورد ممکن است نتیجه غلطی بدید

مثال ۱ - مطلوبست حل پنج‌دی

$$5x - 2a = 10a + 3x$$

مجهول را بیک طرف و معلوم را بطرف دیگر میبریم نتیجه میشود

$$5x - 3x = 10a + 2a$$

و از آنجا $2x = 12a$ $x = 6a$

مثال ۲ - مطلوبست حل پنج‌دی

$$0x + 5a = 5^2 + 6 + 3x$$

مانند مثال پیشین نتیجه میشود $0x - 3x = 5^2 - 5a + 6$

و پس از جمع دو جمله مشابه طرف اول حاصل میشود

$$(a-2)x = a^2 - 5a + 6$$

$$x = \frac{a^2 - 5a + 6}{a-2} = a-2$$

تمرین

۱- متحد بای زیر را حل کنید

$$mx + m = 5m \qquad 5ax - 10a^2 = 5ac$$

$$x - m = m + n \qquad 12a - 2(a-x) = 0$$

$$ay - (a-c) = 2a + c$$

$$2ax + 2ab = 6ab + 2ax - 2ab$$

$$mx + n^2 = 4m^2 - (mx - n^2)$$

$$ax + bx = a^2 - b^2 \quad ; \quad ax - 2a^2 - 1 = a^2 - x$$

۲- دارائی شخصی را معلوم کنید در صورتیکه مبلغ پول موجود او a ریال و دوام او b ریال باشد

در حالتی مخصوص یعنی که $a = b$ و یا $a < b$ باشد نتیجه را تعبیر کنید

۳- دو نفر اولی a ریال و دومی b ریال پول دارد اولی بدومی c ریال بپردازد

و دومی باولی d ریال مبلغ دارائی بر یک چقدر میشود و تفاوت بین دارائی آنها چقدر است؟

۴- شخصی در یک روز a ریال حساب خود در بانک گذاشت و در همان روز b ریال

از بانک گرفت معلوم کنید درین روز چه مبلغ برپس اندازش علاو شده است - اگر $a = 250$

و $b = 520$ باشد تعبیر جواب چیست؟

۵- زمینی است زراعتی به درازای α متر و به پهنای β متر و در آن خیابانی است به پهنای ۲۵ متر که درین زمین واقع شده حساب کنید مساحت قیمت زراعتی زمین را (۱) در حالتی مخصوص:

$$\alpha = 75, \beta = 26 \text{ بهنجین } 125, 15 - \alpha, \beta = 12, 22$$

۶- باغی را به مبلغ α ریال خریدیم و بمبلغ β ریال فروختیم معلوم کنید صدی چند غل شده است

(۱) حالتی مخصوص $\alpha = 12000, \beta = 12900$ و بهنجین $\alpha = 14000, \beta = 14000$

$$(\alpha = 7500, \beta = 7500)$$

۷- پارچه‌ای از شستن اندازه $\frac{3}{4}$ درازایش کوتاه می‌شود یک توپ ازین پارچه پس از شستن

به درازای α متر شده است درازای آنرا پیش از شستن معلوم کنید (۱) حالتی مخصوص: $\alpha = 23, 95$

$$(\alpha = 19, 4)$$

۸- شخصی درازای مرزهای را با قدم خود اندازه گرفت خیال کرد که اگر درازای هر قدمش

۷۲ متر باشد با این حساب درازای مرز α متر می‌شود بعد درازای قدمش را بطور متوسط اندازه گرفت

معلوم شد که مسودی ۷۴ متر است معلوم کنید درازای حقیقی مرز را

۹- درازای پارچه‌ای با متری که β سانتی متر کوتاه است α متر می‌باشد درازای واقعی

$$(\alpha = 15, \beta = 2 \text{ حالت مخصوص } \alpha = 15, \beta = 2)$$

۱۰- اطاعتی است بشکل مستطیل به درازای α متر و به پهنای β متر میخواهیم سطح آنرا از اجزای

بشکل مربع و مضلع ۲۰ سانتی متر فرش کنیم چند آجر لازم است؟ (۱) حالتی مخصوص: $\alpha = 12, \beta = 12$

$$\alpha = 7, \beta = 15 \text{ بهنجین } \alpha = 15, \beta = 8$$

۱۱- شخصی α ریال پول دارد اگر چه ریال بیشتر میداشت بتوانست $\frac{2}{5}$ بدی خود را بر داند و معین کند مبلغ بدی او را (حالتی مخصوص $\alpha = ۱۵۰$ و $\beta = ۷۵$ همچنین $\alpha = ۶۵$ و $\beta = ۷۰$)

۱۲- فاصله بین دو شهر d کیلومتر است اتوبوسی با تندی α کیلومتر در ساعت مدت t ساعت حرکت نموده و چهار تا شهر دوم فاصله دارد؟ (در حالت مخصوص $d = ۱۲۵$ و $\alpha = ۵۰$ و $\beta = ۳$ در جواب مسئله تحقیق کنید)

۱۳- فاصله بین دو شهر d کیلومتر است مسافری قسمتی از آن را که β برابر قسمت دیگر است پیاده معلوم کنید چند کیلومتر پیاده و چند کیلومتر دیگر با قیامده (حالتی مخصوص: $d = ۱۲۰$ و $\alpha = ۳$ همچنین $\alpha = ۱۵۰$ و $\beta = ۴$)

۱۴- مسافری فاصله بین دو شهر را که d کیلومتر است در مدت t ساعت می پاید بدینجهت که $\frac{1}{3}$ آن را با تندی متوسط α کیلومتر در ساعت طی کرده است معلوم کنید تندی متوسط مسافر را در بقیه راه (حالت مخصوص $d = ۱۸۰$ و $t = ۶$ و $\alpha = ۳۰$)

۱۵- فاصله بین دو شهر d کیلومتر است اتوبوس A این فاصله را در t ساعت طی نماید و اتوبوس B که ده دقیقه بعد از اتوبوس A حرکت کرده ۲۵ دقیقه زودتر از آن بشهر دوم میرسد معین کنید اولاً مدتی را که اتوبوس B در حرکت بوده ثانیاً تندی متوسط اتوبوس B را ثالثاً تفاوت تندی های متوسط A و B را (حالت مخصوص $d = ۱۷$ و $t = ۳$)

۱۶- شناسگری در دقیقه اول α متر و در هر دقیقه بعد ۲۵ سانتی متر کمتر از دقیقه پیش می کند

معلوم کنید پس از ۴ دقیقه چند متر شنا کرده است و درین مدت بطور متوسط دقیقه چند متر در آب جلورفته است

۱۷- در ازای استخوان α متر است اگر شناگری بتواند بطور متوسط دقیقه $(\alpha = ۰.۰۷)$ متر شنا کند

پس رود پس از چه مدتی در ازای استخوانی بمیاید (حالتی مخصوص: $\alpha = ۶۳.۲۵$ و

$\alpha = ۲۷.۷۵$ همچنین $\alpha = ۴۳.۶۵$ و $\alpha = ۳۵.۲۵$)

۱۸- باغیت شکل متغیر که در ازای آن α متر پیش از پنهان می باشد و پنهانیش $\frac{1}{2}$ در ازای

است حساب کنید در از او پنهان و مساحت باغ را (حالتی مخصوص: $\alpha = ۱۰$ و $\alpha = ۱۲۰$)

۱۹- قیمت α کیلوگرم گوشت α ریال است میدانیم که $\frac{1}{4}$ آن استخوان است معلوم کنید

قیمت یک کیلوگرم گوشت بی استخوان را (حالت مخصوص $\alpha = ۱$ و $\alpha = ۷۲$)

۲۰- درآمد سالیانه شخصی α ریال است و مخارجش α ریال معلوم کنید پس از چند سال مبلغ

α ریال پس انداز خواهد کرد؟ حالت مخصوص ($\alpha = ۱۲۰۰۰$ و $\alpha = ۷۰۰۰$) و

($\alpha = ۱۵۰۰۰$)

۲۱- مبلغ α ریال بین ۵ نفر تقسیم شود و نفرات آنها هر یک α ریال بیشتر سهم میسرند حساب

کنید سهم هر یک را (حالت مخصوص $\alpha = ۱۵۰$ و $\alpha = ۱۲.۵$)

۲۲- هر ۳۵ یارد تقریباً مساوی ۳۲ متر است معلوم کنید α متر چند بار در α یارد

چند متر است؟

۲۳- هر ۵۵ سانتی متر تقریباً مساوی ۴۱۵ اینچ است دستور تبدیل α سانتی متر را

به اینچ پیدا کنید

۲۴- مجموع سه عدد متوالی را حساب کنید در صورتیکه عدد وسط مساوی a باشد و $\frac{1}{3}$ این مجموع

بدست آورید (حالتهای مخصوص: $a = 12$ و $a = -5$ و $a = -1$ و $a = 10$)

($a = 0$)

۲۵- فرد روزانه پدری a ریال و فرد روزانه پسرش b ریال کمتر است مخارج آنها

در روز $\frac{1}{3}$ در آمد روزانه آنهاست معلوم کنید مبلغ پس انداز آنها را پس از ۵ روز (حالت مخصوص

$a = 25$ و $b = 7$)

۲۶- در ازای ضلع های مثلثی a و b و c در ازای محیط آن 2 است برکت

از عبارتهای $a - c + b$ و $a + b - c$ و $a + c - b$ را بر حسب 2 و 1 یکی از اضلاع حساب کنید.

۲۷- شخصی مقداری پارچه خرید به a ریال و در فروش آن صدی پانزده خرید نفع برد مبلغ

فروش را در حساب کنید (حالت مخصوص $a = 245$)

فضل چپسارم اتحاد های مهم

۱۱۲- چنانکه پیش گفتیم اتحاد تسادی بین دو عبارت جبری است بقسمی که چون در عبارت عمل های لازم را انجام دهیم دو طرف عین یکدیگر شوند. بنابراین باید دو طرف یک اتحاد برابر هر مقدار عددی که بجای حرفها گذاشته میشود باید یکدیگر تسادی شود.

چون در اعمال جبری دانستن بعضی از اتحادها لازم است بنابراین باید دانش آموزان همواره این اتحادها را که اکنون میگوئیم بخاطر داشته باشند:

۱۱۳- اتحاد ۱- توان دوم یک دو جمله - چون دو جمله $a+b$ و همچنین $a-b$ را بتوان ۲ رسانیم حاصل میشود:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

بنابراین این دو اتحاد بدست میآید:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

یعنی: توان دوم یک دو جمله مساویست با مجموع توانهای دوم

دو جمله آن بعلاوه دو برابر حاصل ضربشان (هر جده را با نشا
مگرفت).

نتیجه - از تفریق دو اتحاد بالا این اتحاد بدست می آید

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

یعنی: توان دوم مجموع دو جمله منهای توان دوم تفا
مساویست با چهار برابر حاصل ضرب آن دو جمله.
بنابر اتحاد های بالا

$$(1+1)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1$$

$$(-3)^2 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 9$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(x-2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$$

$$(2-\sqrt{3})^2 = 2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3 = 5 - 4\sqrt{3}$$

$$(a+1)^2 - (a-1)^2 = 4a$$

$$(5+1)^2 - (\sqrt{5}-1)^2 = 4\sqrt{5}$$

$$(x+y)^2 - (2x-y)^2 = 1xy$$

متبصره ۱- میدانیم که دو عدد متبینه دارای یک توان دوم

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \quad \text{و} \quad (b-a)^2 - (a-b)^2 = 0$$

پرسش های شفاهی

حاصل این عبارتها را بدست آورید

$$(x+1)^2, \quad (10-y)^2, \quad (7x-a)^2$$

$$(x-2a)^2, \quad (2x-1)^2, \quad (a+2x)^2$$

$$(2x-y)^2, \quad (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2, \quad (\sqrt{5}-2)^2$$

$$(2x-5y)^2, \quad (\sqrt{5}+\sqrt{3})^2, \quad (2\sqrt{2}-1)^2$$

$$(2x+1)^2 - (2x-1)^2, \quad (y+\sqrt{5})^2 - (y-\sqrt{5})^2$$

$$(2\sqrt{2}+1)^2 - (2\sqrt{2}-1)^2, \quad (x\sqrt{2}+y\sqrt{2})^2 - (x\sqrt{2}-y\sqrt{2})^2$$

تبصره ۲- از روی اتحادی (۱) میتوان بعضی از عددها را در ذهن توان دوم

رسانید

$$(21)^2 = (20+1)^2 = 400 + 40 + 1 = 441$$

مانند

پرسش های شفاهی

عددهای زیر را بتوان دوم برسانید

$$31 \qquad 71 \qquad 19 \qquad 31$$

$$29 \qquad 101 \qquad 199 \qquad 78$$

تبصره ۳- هرگاه بخوانیم یک سه جمله را بتوان دوم برسانیم چون دو جمله از جمله

فرض کنیم میتوانیم از روی اتحاد (۱) آنرا بتوان دوم رسانیم.

چنانکه توان دوم سه جمله $a + b - c$ را میتوان چنین نوشت

$$(a + b - c)^2 = [(a + b) - c]^2 \\ = (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$$

و چون $(a + b)$ را بتوان دوم برسانیم و حاصل $c - 2(a + b)$ را بدست آوریم
توان دوم سه جمله $a + b - c$ چنین میشود

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

و همچنین برای اینکه یک چهار جمله را بتوان دوم برسانیم کافی است که هر دو جمله
آنرا یکجمله فرض کنیم

مثال - $(a - b + c - d)^2 = [(a - b) + (c - d)]^2$

$$(a - b)^2 + 2(a - b)(c - d) + (c - d)^2$$

پس از انجام عمل های لازم حاصل چنین میشود

$$(a - b + c - d)^2 =$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad + 2bc + 2cd - 2cd$$

ازین مثالها و مثالهای دیگر این قاعده برای بدست آوردن توان دوم یک

چند جمله نتیجه میشود:

توان دوم یکچند جمله مساویست با مجموع توانهای دوم جمله های آن
بعلاوه دو برابر حاصل ضرب هر جمله در جمله های دیگر (هر جمله را باقی

در نظر بگیرید.

تمرین

۱- چند جمله‌ای زیر را بر توان دوم بسازید:

$$(x - y + 1) \quad (a - 2b - c) \quad (2b + 2 - \sqrt{3})$$

$$(2x - 2y + 2z) \quad (-a - 2b - \sqrt{5})$$

$$(\sqrt{2} - \sqrt{3} + 1) \quad (\sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{5})$$

$$(\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{5}) \quad (2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 5\sqrt{5})$$

$$(x - y - a + 1) \quad (2x - 2y - 2a - 2b)$$

۲- راستی‌نمای زیر را تحقیق کنید:

$$\sqrt{7+2\sqrt{6}} = \sqrt{6} + 1 \quad \sqrt{2} + 2\sqrt{5} = \sqrt{47+6\sqrt{10}}$$

$$2\sqrt{7}-\sqrt{6} = \sqrt{24-4\sqrt{42}} \quad 5-2\sqrt{7} = -\sqrt{52-20\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \quad \sqrt{2-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$$

۳- مستطینی است به درازای a و پهنای b برای مستطیل دومربع بضیع e و g اضافه

کنید و از سطح حاصل مربعی بضیع g - a بردارید ثابت کنید که مساحت باقیمانده سه برابر مساحت

مستطیل مفروض است

۱۱۴- اتحاد ۲- حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آنها چون جمله

$a+b$ دارد و جمله $a-b$ (دو عبارت $a+b$ و $a-b$ را مفروض بگیرید

گویند ضرب کنیم این اتحاد بدست میاید:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

یعنی حاصل ضرب مجموع دو جمله در تفاضل آنها مساویست با توان

دوم جمله اول (کاتریاب) منهای توان دوم جمله دوم (کاسته)

$$(a+2)(a-2) = a^2 - 4$$

مثال -

$$(x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2$$

$$(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}) = a+b - (a-b)$$

$$= a+b - a+b-2b$$

$$\sqrt{1+2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1-2\sqrt{3}} = \sqrt{(1+2\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})}$$

$$= \sqrt{1-12} = \sqrt{-11} = i\sqrt{11}$$

پرسش های شفاهی

عبارت زیر را در مزدوج خود ضرب کنید

$$x^2 + 2$$

$$1 + 2x$$

$$4a - b$$

$$7x - y$$

$$4xy - 2$$

$$a^2 - 5$$

$$a^2 + 2x^2$$

$$xy - y^2$$

$$ax - by$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{3} - 5$$

$$3 - 2\sqrt{7}$$

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را معلوم کنید:

$$\sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}} \quad \sqrt[3]{2\sqrt{13}-5} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{13}+5}$$

$$(\sqrt{x^2+9} + 3)(3 - \sqrt{x^2+9})$$

$$\sqrt{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \cdot \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$(a\sqrt{b} - b\sqrt{a})(b\sqrt{a} + a\sqrt{b})$$

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a} + \sqrt{a^3 - x^3}} \cdot \sqrt[3]{a\sqrt{a} - \sqrt{a^3 - x^3}}$$

$$(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} - \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}})^2$$

۱۱۵- اتحاد ۲- حاصل ضرب دو دو جمله که در یک جمله مشترکند-

چون دو جمله ای $x+a$ را در دو جمله ای $x+b$ ضرب کنیم چنین میشود:

$$\begin{array}{r} x+a \\ x+b \\ \hline x^2+ax \\ +bx+ab \\ \hline x^2+(a+b)x+ab \end{array}$$

بنابراین اتحاد زیر بدست میآید:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

یعنی: حاصل ضرب دو دو جمله که در یک جمله مشترکند مساویست با توان دوم جمله مشترک بعلاوه حاصل ضرب مجموع دو جمله غیر مشترک در جمله مشترک بعلاوه حاصل ضرب دو جمله غیر مشترک (باید هر جمله را باثانه خود در نظر گرفت).

مثال

$$(x+2)(x+3) = x^2 + (2+3)x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

$$(x-5)(x-3) = x^2 + (-5-3)x + 15 = x^2 - 8x + 15$$

$$(x+4)(x-2) = x^2 + (4-2)x - 8 = x^2 + 2x - 8$$

$$(2\sqrt{b}-a)(\sqrt{b}-a) = a^2 - 3a\sqrt{b} + 2b$$

پرستی شهابی

حاصل عبارتهای زیر را تعیین کنید

$$(a+1)(a+2)$$

$$(x+5)(x+7)$$

$$(y-2)(y-5)$$

$$(a-2)(a-1)$$

$$(x-1)(x+5)$$

$$(y-2)(y+2)$$

$$(y-2)(y+7)$$

$$(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$$

$$(x^2+3x+2):(x+2)$$

$$(a^2-6a+1):(a-2)$$

$$(a^2-a-6):(a-2)$$

$$(x^2-x-20):(x-5)$$

۱۱- توان سوم دو جمله - توان سوم یک دو جمله مساویست با مجموع

توانهای سوم هر جمله بعلاوه سه برابر توان دوم هر جمله در جمله دیگر

(هر جمله باقی‌مانده خود)

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

یعنی:

$$(a-b)^2 = a^2 - b^2 - 2ab + 2ab^2$$

مترین

۱- حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 - 2b^2$$

$$(2x-5)^2 + (x-2)(x+2) - 2x(3x-5)^2$$

$$(a+b)(b+c) - (c+d)(d+a) + (a+c)(c+a)$$

۲- ثابت کنید که تساویهای زیر براتحادند:

$$(\sqrt{2} - \sqrt{4})(\sqrt{2} + \sqrt{4}) - (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = 0$$

$$(2 - 3\sqrt{5})(2 + 2\sqrt{5}) - (\sqrt{2} - 1)^2 = 2\sqrt{2}$$

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$$

$$(a + \sqrt{x})^2 + (a - \sqrt{x})^2 = 2a^2 - 6ax$$

فصل پنجم تجزیه عبارت‌ها بجای ضرب بسازها

۱۱۷- تعریف - هر عبارت جبری که جز بر خود دوگیت (بدون قید نشانه) بر عبارت دیگری بخش پذیر نباشد آنرا اول گوئیم (مانند اعداد اول در حساب)

چند جمله‌ای $2x+1$ و $3x-5$ و x^2+1 هر یک عبارتی اول هستند

بنابر این هرگاه عبارتی غیر اول باشد یعنی بر عبارت دیگری بخش پذیر باشد تبدیل بجای ضرب دوسازه میشود (نمره ۱۱۰ تبصره)

ممکن است که هر یک از این دوسازه نیز تبدیل بجای ضرب دوسازه دیگر شود چون این عمل را ادامه دهیم بالاخره عبارت مفروض بجای ضرب چندین سازه اول تجزیه میگردد این عمل را تجزیه بجای ضرب سازه ها گویند

چنانکه عبارت‌های $5x^2$ و x^2 و $12x$ و $4x-4$ و $5x^2+5$ عبارت‌های غیر اولند که اولی بر دوسازه 5 و $5x$ و دومی بر x و سومی بر سازه‌های 2 و 4 و 5 و x و چهارمی بر سازه‌های 4 و $x-1$ و پنجمی بر سازه‌های 5 و x^2+1 بخش پذیرند و پس از تجزیه هر یک بسازه‌های اول میتوان چنین نوشت:

$$ab = a \cdot b$$

$$x^2 = x \cdot x$$

$$12 \cdot 5 = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot x$$

$$4x - 4 = 4x(x - 1)$$

$$ax + a = a(x + 1)$$

تجزیه بسازه های اولی از قسمت های مهم جبر و متغایه است که در ساده کردن برخه ها و عملیات جبری و حل مسندها بکار میرود و در اینجا بعضی از قاعده های ساده آن را میگوینم:

۱۱۸ - الف - تجزیه چند جمله وقتی که جمله های آن دارای سازه مشترکی باشند -

در چند جمله $ab + ac - ad$ جمله های آن دارای سازه مشترک a میباشند بنابراین چند جمله بر سازه a بخش پذیر است پس:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$

یعنی چند جمله بالا بحاصل ضرب دو سازه a و $(b + c - d)$ تجزیه شده است که چون این دو سازه در هم ضرب شوند چند جمله مفروض بدست میآید.

قاعده - نخست سازه مشترک جمله های چند جمله را یقین میکنیم پس از آن چند جمله مفروض را برین سازه مشترک تقسیم نموده براین تقسیم بدست میآوریم و عبارت مفروض مساوی حاصل ضرب سازه

مشترک درین بهر خواهد بود.

مثال ۱- جمله های چند جمله $a^2 - 15ax + 7a^2$ بر a^2 بخش پذیرند یعنی a^2 سازه
مشترک بین جمله های آن میباشد و چون آنرا بر a^2 تقسیم کنیم بهر مساوی $7ax - 15$ میشود

بنابراین
$$7ax - 15a^2 = a^2(7ax - 15)$$

مثال ۲- عبارت $\sqrt{2}(a-b) - \sqrt{2}(a-b)$ بر $a-b$ بخش پذیر است
و بهر $\sqrt{2} - \sqrt{2}$ میباشد پس:

$$\sqrt{2}(a-b) - \sqrt{2}(a-b) = (a-b)(\sqrt{2} - \sqrt{2})$$

مثال ۳- عبارت $3 \times 5 \times 17 - 3 \times 5 \times 14$ را حساب کنید.

از روی تجزیه چنین خواهیم داشت

$$3 \times 5 \times 17 - 3 \times 5 \times 14 = 3 \times 5 (17 - 14) = 3 \times 5 \times 3 = 45$$

پرشش های ششای

عبارتهای زیر را با حاصل ضرب سازه تجزیه کنید:

$(21)^2$	$(24)^2$	$(15)^2$
$11abx^2$	$-36aby^2$	$2x-2$
$ax+a$	$5x^2 + 10x$	$ax+cx$
$ac-c^2$	$2ax-6a$	$ax+acx$
$5ax^2-10x^2$	$12ax-10bx$	$2ac-abc$

$$2ax - fab \quad 3ax + 6bx \quad -2ax' + ax$$

$$ab + ax + ay \quad acx - 3ac - c^2 \quad 2ay - 4y' + 6ay$$

مترین

۱- عبارتهای زیر را با حاصل ضرب مناسب ساز و با تبدیل کنید

$$2ax - 15a^2 \quad ax - a^2x - a^2x$$

$$3c^2 - 12c - 18c^2 \quad ay - abc - aby$$

$$a^2 - 2ax + a \quad 2c^2 - 15c + 5c^2$$

$$a^4 - a^2 + a^2 + a \quad 1a^2 - 4c^2 + 12a^3 - 6a^5$$

$$1ax - 2bx + 12x\sqrt{5} \quad 12ax^2 - 2x\sqrt{2} + 6x^2\sqrt{6}$$

۲- پیچیدگی های زیر را حل کنید:

$$ax = am - ac \quad my = am + bm - cm$$

$$2ax = 6ab - 12ac + 2a^2 \quad 2ax = 2ab - 12ac + 2a^2$$

۳- عبارتهای زیر را حساب کنید:

$$3 \times 15 \times 12 \times 12 - 3 \times 15 \times 12^2$$

$$\frac{22}{y} (21)^2 + \frac{22}{y} (14)^2 - \frac{22}{y} (21 \cdot 14)$$

$$5742 \times (13)^2 + 5742 \times 65 + \frac{4 \times 5742 \times 13 \times 12}{2}$$

۱۱۹- ب- تجزیه چند جمله بوسیله دسته بندی - دسته بندی یعنی دسته

کردن جمله های یک چند جمله ای که جمله های هر دسته دارای سازه مشترکی باشند :

مانند چند جمله $ax + by + cx + ay$ که آنرا میتوان بدو دسته $ax + cx$ و $ay + by$ تبدیل نمود دسته اول دارای سازه مشترک x و دسته دوم دارای سازه مشترک y میباشد بنابراین خواهیم داشت

$$ax + by + cx + ay = x(a + c) + y(a + b)$$

و حالا دید میشود که طرف دوم این تساوی بر $a + b$ بخش پذیر است پس

$$ax + by + cx + ay = (a + b)(x + y)$$

بطور کلی هر عبارتی که مانند عبارت بالا یعنی بصورت $ax + by + cx + ay$ باشد بواسطه دسته بندی تجزیه پذیر میباشد.

مثال ۱- چند جمله $2cx^2 - 3abx + 2cx - 3ac$ را بجاصل ضرب سازه ها

تجزیه کنید

چون چند جمله مفروض را بدو دسته $2cx^2 - 3abx$ و $2cx - 3ac$

تبدیل کنیم و هر یک از این دو دسته را بجاصل ضرب سازه ها تجزیه نماییم چنین خواهیم داشت

$$2cx^2 - 3abx + 2cx - 3ac = cx^2(2x - 3a) + c(2x - 3a)$$

طرف دوم این تساوی بر $2x - 3a$ بخش پذیر است پس :

$$2cx^2 - 3abx + 2cx - 3ac = (2x - 3a)(cx + c)$$

مثال ۲- مطلوبست تبدیل عبارت $2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 6 + \sqrt{6}$ بجاصل ضرب

سازده!

در دو جمله اول و سوم عدد ۳ و در دو جمله دیگر $\sqrt{3}$ سازده مشترک است بنابراین

میتوان چنین نوشت:

$$6 + \sqrt{6} + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 3(2 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}(\sqrt{2} + 2)$$

$$= (2 + \sqrt{2})(3 + \sqrt{6})$$

مثال ۳- میخواهیم عبارت

$$1 + xy + a(x + y) - (x + y) - a(1 + xy)$$

را بجا حاصل ضرب سازده با تجزیه کنیم

$1 + xy$ را یکجمله فرض می کنیم بنابراین با جمله آخر دارای سازده مشترک $1 + xy$

میشود و دو جمله دیگر عبارت مفروض دارای سازده مشترک $x + y$ است پس عبارت

بالا منادی

$$(1 + xy)(1 - a) + (x + y)(a - 1)$$

دیامنادی $(1 - a)(x + y) - (1 + xy)(1 - a)$ میشود.

سازده مشترک این عبارت $1 - a$ است بنابراین عبارت مفروض بدین صورت دیامنادی

$$(1 - a)(1 + xy - x - y)$$

پراثرزدوم نیز تجزیه پذیر است زیرا اگر آن را بدو دسته $xy - x$ و

$-y$ تبدیل کنیم و در دسته اول x و در دسته دوم -1 را سازده مشترک قرار دهیم داخل پرانتز

مساوی

$$(y-1)(x-1) \text{ یا } x(y-1) - (y-1)$$

پس عبارت بالا بصورت حاصل ضرب

$$(1-a)(y-1)(x-1) \text{ یا } (1-a)(y-1)(x-1)$$

مثال ۲- مطلوبست حل پیمیزی

$$abx + x = abc + c - 2ab - 2$$

دو طرف را بحاصل ضرب ساز و با تجزیه می کنیم پس خواهیم داشت:

$$x(ab+1) = c(ab+1) - 2(ab+1)$$

$$x(ab+1) = (ab+1)(c-2) \quad \text{و یا}$$

و اگر $ab+1 \neq 0$ باشد ریشه پیمیزی چنین است:

$$x = c - 2$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بحاصل ضرب ساز و با تجزیه کنید:

$$ax + 2x + ay + 2y \quad x^2 + 2x + x + 1$$

$$a(c-y) - b(y-c) \quad ay(a-b) + ax(b-a)$$

$$2ax - 6bx - ay + 2by \quad ax + 2a - bx - 2b$$

$$x^2 - ay + axy - x \quad a^2 - 2ax - a^2x + 2x^2$$

$$a^2c - acx + acx^2 - a^2cx$$

$$12ax^5 - 6ax^3 - 4x^5 + 2x^3$$

$$10 + \sqrt{24} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}$$

$$4\sqrt{14} - 6\sqrt{15} - 2\sqrt{30} + 15$$

۲- ac ، ab ، مساحتی دو مستطین که پهلوهای آن (a, b) و (a, c)

میباشد راست گوشه ای (مربع مستطیل) پیدا کنید که مساحتش برابر مجموع مساحتی آنها باشد (و نیز از روی شکل برابر بودن آنها را ثابت کنید)

۳- در مسئله پیش راست گوشه ای پیدا کنید که مساحتش برابر تفاضل مساحتی آنها باشد (و نیز

از روی شکل برابر بودن آنها را ثابت کنید)

۴- a ، b ، c و d ناییش چهار درازا میباشند ثابت کنید که مجموع چهار مستطیل ab

ac ، bc و bd را میتوان بیک راست گوشه تبدیل کرد که از حیث مساحت با مجموع آنها برابر باشد

(از روی شکل سینه همین مطلب را به ثبوت رسانید)

۵- در عبارت $ac - bc + ad - bd$ a ، b ، c و d ناییش چهار درازا

میباشد - اول معانی هندسی عبارت بالا را بگوئید دوم آن عبارت را بساز و نای اول تجزیه نموده و تعبیر هندسی تساوی حاصل را بیان کنید.

۱۲- ۷- تجزیه سه جمله نای که بصورت $a^2 \pm 2ab + b^2$

میباشند - از اتحاد (۱) معلوم میشود:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

یعنی: هر سه جمله ای که مرکب از مجموع توانهای دوم و سازه بعلاوه
(یا منهای) دو برابر حاصل ضربشان باشد بتوان دوم مجموع (یا تفاضل)
آن دو تبدیل میگردد.

مثال - در سه جمله $25a^2 + 60ab + 36b^2$ دو جمله اول و آخر نیز

توان دوم و سازه $5a$ و $6b$ باشد و جمله $60ab$ برابر است با

$5a \times 6b \times 2$ بنا بر این این سه جمله را میتوان چنین نوشت

$$25a^2 + 60ab + 36b^2 = (5a + 6b)^2$$

همچنین سه جمله $4x^2 + 9a^2 - 12ax$ تشکیل شده است از مجموع توانهای دوم $2x$

و $3a$ و جمله $-12ax$ که مساویست با $-2 \times 2x \times 3a$ پس

$$4x^2 + 9a^2 - 12ax = (2x - 3a)^2 = (3a - 2x)^2$$

پرش های شفاهی

۱- بر هر یک از عبارتهای زیر جمله ای بیفزایند تا عبارت حاصل بصورت توان دوم نگردد.

در جمله در آید:

$$a^2 + 1$$

$$1 + 16c^2$$

$$12x + 36$$

$$y^2 - 11y$$

$$-16x + 64$$

$$16a^2 - 16ax$$

$$-22ac + 9c^2$$

$$16x^2 + 4y^2$$

$$16x^2 - 22ax$$

$$25a^2 + 100$$

$$9x^2 - 6x$$

$$2x^2 - 12cx$$

۲- سه جمله های زیر را به توان دوم یکت دو جمله تجزیه کنید

$$x^2 - 4x + 4$$

$$9x^2 - 12x + 4$$

$$4y^2 - 4y + 1$$

$$a^2 - 14a + 49$$

$$c^2 + 4 - 4c$$

$$11 - 11t^3 + t^6$$

$$c^8 + 2c^4 + 1$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$4x^2 + x + \frac{1}{16}$$

$$9a^2 - 10a + \frac{1}{9}$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را حاصل ضرب ساز و استخراج کنید

$$16t^2 - 16at + a^2$$

$$25x^2 - 20xy + 4y^2$$

$$9a^2 - 20at + 16t^2$$

$$4a^2 - 21at + 9t^2$$

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$$

$$144t^2 - 120at + 25a^2$$

$$169x^2 + 210ax + 9a^2$$

$$x^4 + 4xy^3 + 4x^2y^2$$

$$4dt^4 - 4at^2 + 1$$

$$121x^2 - 110cx + 25c^2$$

$$\frac{25}{16}x^2 + \frac{5}{4}x + 1$$

$$y^2 + y + \frac{1}{4}$$

$$121x^2 - 220tx + 100t^2$$

$$169a^2 - 156ax + 36x^2$$

۲- بچندى های زیر را حل کنید:

$$ax - cx = a^2 - 2ac + c^2$$

$$ax - 2tx = a^2 - 2at + t^2$$

$$tx - 2z = t^2 - 2bt + 16$$

$$ay - c^2 = a^2 - 2ac - cy$$

متبصره - در تجزیه یک عبارت جبری بهتر است که نخست سازدهم مشترک تمام جمله ها را اگر کوچک

باشد تعیین نموده پس از آن تجزیه پرداخت

مثال ۱ - عبارت $ax^2 - 2ax + a^2$ را بجاصل ضرب سازدهم تجزیه کنید.

چند جمله $ax^2 - 2ax + a^2$ بر a بخش پذیر است بنا بر این

$$ax^2 - 2ax + a^2 = a(x^2 - 2x + 1)$$

سه جمله درون پرانتز توان دوم $x-1$ است پس

$$ax^2 - 2ax + a^2 = a(x-1)^2$$

مثال ۲ - میخواهیم عبارت $2ct - 2cx + 2at - 2ax$

بجاصل ضرب سازدهم تجزیه کنیم.

عبارت بالا را میتوان بترتیب چنین نوشت

$$2ct - 2cx + 2at - 2ax = 2(ct - cx + at - ax)$$

$$= 2[c(t-x) + a(t-x)]$$

$$= 2(t-x)(c+a)$$

تمرین

عبارت های زیر را بجاصل ضرب سازه ماتجزیه کنید:

$$t^5 - 2t^3 + 2t^2$$

$$2c^3 - 20c^2 + 50c$$

$$16a^2 - 40at + 25a^2t^2$$

$$at^2 - 7at + 24aa$$

$$32at^3 - 41at^2 + 11at^4$$

$$2at + 2ay + 22t + 22y$$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x$$

$$2a^5 - 2a^4 + 2a^3 - 2a^2$$

$$30at - 15a + 12c - 24ct$$

$$4atx + 4btx - 10aty - 10btz$$

$$\pi k(R-z)^2 - \pi k(R+z)^2 + \pi kR^2$$

۱۲- د- تجزیه عبارتیکه بصورت $a^2 - b^2$ باشد - از اتحاد شماره ۱،

چنین برمی آید:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

یعنی: تفاضل توانهای دوم دو عبارت بجاصل ضرب مجموع
آن دو در تفاضلمان تجزیه میگردد.

مثال ۱- عبارت $16x^4 - 11x^2$ را بجاصل ضرب سازه ماتجزیه

چون این عبارت بصورت $a^2 - b^2$ است خواهیم داشت :

$$16x^4 - 81a^4 = (4x^2 + 9a^2)(4x^2 - 9a^2)$$

پراشردوم نینسہ تجزیہ میشود بنا براین :

$$16x^4 - 81a^4 = (4x^2 + 9a^2)(2x^2 + 3a^2)(2x^2 - 3a^2)$$

مثال ۲- مطلوبت محاسبه $59^2 - 57^2$

از روی تجزیہ حاصل آن آسانی بدست میآید ازینقرار :

$$59^2 - 57^2 = (59 + 57)(59 - 57) = 116 \times 2 = 232$$

پیشش های شهابی

عبارت های زیر را بجاصل ضرب سازو تجزیہ کنید :

$$a^2 - 9 \qquad 4x^2 - 1 \qquad 4x^2 - 9$$

$$25y^2 - 36x^2 \qquad 100x^2 - 81y^2 \qquad 81x^2 - 121y^2$$

$$\frac{1}{25} - \frac{1}{10}x \qquad x^2 - \frac{25}{64} \qquad \frac{4}{9}x^2 - 121$$

$$17^2 - 15^2 \qquad 25^2 - 5^2 \qquad 36^2 - 24^2$$

مثال ۱- مطلوبت بدیل عبارت $(a+b)^2 - (a-b)^2$

بجاصل ضرب سازو د.

عبارت مفروض را میتوان چنین نوشت :

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = [(a+b) + (a-b)][(a+b) - (a-b)]$$

$$= (a + b + a - b)(a + b - a + b) \\ = 2a \cdot 2b = 4ab$$

دید می شود که این تجزیه همان نتیجه اتحاد شماره ۱۱۲ است

مثال ۲- عبارت $(1-2y)^2 - (2x-1)^2$ را با حاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:
 میتوان چنین نوشت

$$(2x-1)^2 - (1-2y)^2 = [(2x-1) + (1-2y)][(2x-1) - (1-2y)] \\ = (2x-2y)(2x+2y-2)$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را با حاصل ضرب سازه ها تجزیه کنید:

$$16a^4 - 16b^4 \qquad 16a^2 - 9(a+b)^2$$

$$16x^2 - 9(a-2x)^2 \qquad 64x^2 - (1x+2y)^2$$

$$(a-2x)^2 - (2x+5)^2 \qquad (2a-5)^2 - (2a+5)^2$$

$$4a-2b)^2 - (2a-2b)^2 \qquad 12(x-2y)^2 - 41(2x-y)^2$$

۲- عبارت های زیر را حساب کنید:

$$72^2 - 42^2 \qquad 56^2 - 51^2 \qquad 127^2 - 27^2$$

$$114^2 - 64^2 \qquad 154^2 - 146^2 \qquad 215^2 - 115^2$$

۳- بازاء $\pi = \frac{11}{7}$ ، $R = 11$ ، $x = 7$ عبارتهای زیر را حساب کنید:

$$\frac{4}{7}\pi R^2 - \frac{4}{7}\pi r^2 \quad , \quad \pi R^2 - \pi r^2$$

مثال ۱- عبارت $a^2 - 2ab + b^2 - x^2$ را بکامل ضرب سازدها تجزیه کنید

سه جمله اول توان دوم $a - b$ است بنابراین میتوان چنین نوشت

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 - x^2 &= (a - b)^2 - x^2 \\ &= (a - b + x)(a - b - x) \end{aligned}$$

مثال ۲- عبارت $t^3 - t^2 - 4t + 4$ را بکامل ضرب سازدها تجزیه کنید:

میتوان برتیب چنین نوشت

$$\begin{aligned} t^3 - t^2 - 4t + 4 &= t^2(t - 1) - 4(t - 1) \\ &= (t - 1)(t^2 - 4) \\ &= (t - 1)(t + 2)(t - 2) \end{aligned}$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را بکامل ضرب سازدها تجزیه کنید:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 4x + 1 - m^2 & \quad y^2 - z^2 + x^2 - 2xy \\ 4xy - t^2 + y^2 + 9x^2 & \quad 1 - 4at - t^2 + 4a^2t^2 \\ 11at - 2a^2 - 9t^2 + m^2 & \quad m^2 - a^2 - 2at - t^2 \\ x^2 - 4xt + 4t^2 - 9a^2 + 6a - 1 & \end{aligned}$$

$$1 + 2bc + 2a - c^2 - b^2 + a^2$$

$$a^2 - a + ax - x$$

$$2a^2x + 2ax - 1ax - 12x$$

$$t^4 - 10t^2 + 1$$

$$t^3 + 2t^5 + t^7$$

$$2x^4 - 40x^2 + 200 - 2m^2$$

$$5a^4 + 20a^2 + 5a^5 - 20a^7$$

۲- پنجمی های زیر را حل کنید (بنا بر اینکه x مجهول باشد):

$$ax + bx = a^2 - b^2$$

$$t^5x - t^3 = tx - t$$

$$x(t-2)(t^2+1) = t^4 - 11 \quad ax = a^2 - 2a + 1 + ax$$

$$x^2 + px + q$$

۱۲۲- ۵- تجزیه سه جمله درجه دوم

(از اتحاد ۳) چنین برمی آید که:

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$$

یعنی: سه جمله $x^2 + px + q$ وستی تجزیه پذیر بسازد های درجه

اول است که هر حاصل جمع دو مقدار و حاصل ضرب همان باشد.

مثال ۱- سه جمله $x^2 + 3x + 2$ را تجزیه کنید.

عدد ۲ را باید تبدیل بحاصل ضرب دو مقدار نمود بطوریکه مجموعشان ۳ باشد چون

حاصل جمع و حاصل ضرب هر دو مثبت هستند بنا بر این دو عدد مطلوب مثبت بود

و مساوی ۱ و ۲ میباشد پس :

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

مثال ۲- سه جمله $a^2 - 11a + 24$ را تجزیه کنید .

حاصل ضرب دو عدد مطلوب که ۲۴ باشد مثبت است و مجموعشان یعنی ۱۱- منفی است
بنابراین این دو عدد منفی میباشد برای تعیین آنها عدد ۲۴ را باید بدو ساز تجزیه
نمود بطوریکه مجموعشان ۱۱ شود و چون ۲۴ تشکیل شده است از حاصل ضرب

$$1 \times 24 \quad \text{که در اینجا مجموعشان} \quad 25 \text{ است}$$

$$2 \times 12 \quad \text{یا} \quad 14 \text{ است}$$

$$3 \times 8 \quad \text{یا} \quad 11 \text{ است}$$

$$4 \times 6 \quad \text{یا} \quad 10 \text{ است}$$

بنابراین می بینیم که دو عدد مطلوب ۲- و ۱- میباشد

$$a^2 - 11a + 24 = (a-1)(a-2) \quad \text{پس}$$

مثال ۳- مطلوبست تجزیه سه جمله $c^2 - c - 42$ بدو سازه درجه اول

چون حاصل ضرب دو عدد مطلوب (یعنی ۴۲-) منفی است پس نشانه آنها مختلف باشد
و چون حاصل جمعشان (یعنی ۱-) منفی است پس آنکه قدر مطلقش بزرگتر است منفی باشد
بنابراین باید ۴۲ را بدو ساز تجزیه کنیم قسمتی که تفاضشان ۱ باشد و بعد سازه بزرگتر

منفی گیریم :

۴۲ تشکیل شده است از:

۴۲ × ۱	که در اینجا تفاضلشان	۱ است
۲۱ × ۲	۰	۱۹ است
۱۴ × ۳	۰	۱۱ است
۷ × ۶	۰	۱ است

پس دو عدد مطلوب ۷- و ۶ میباشند و از آنجا خواهیم داشت:

$$c^2 - c - 42 = (c - 7)(c + 6)$$

تمرین

۱- عبارتهای زیر را با حاصل ضرب سازده تجزیه کنید:

$$x^2 + 4x + 3$$

$$a^2 - 9a + 14$$

$$t^2 + 3t - 10$$

$$x^2 - 1x + 7$$

$$t^2 - t - 6$$

$$y^2 - 2y - 45$$

$$-x^2 - x + 12$$

$$-2y - y^2 + 64$$

$$ab^2 + 10abx^2 - 24x^6$$

$$22a^2 - 6x^2 - 10abx$$

$$(a+x)^2 + 2(a+x) + 1$$

در این عبارت مجموع $(a+x)$ را در نظر بگیرید.

۲- تمرین باقی بمانده: عبارتهای زیر را با حاصل ضرب سازده تجزیه کنید:

$$x^2 - 2x$$

$$56t + t^2 - t^2$$

$$3y^2 - 9y - 3$$

$$ab^2 - 7ab - 11a$$

$$11a - 11a^2 + a^5$$

$$4a^5 - 92a^2 - 200a$$

$$9at^2 + 2tc + 11atx + 9ctx$$

$$2a^2 - 4ay^2 - 1ayx - 4ax^2$$

۳- بجهت یابی زیر را بنا بر آنکه x و y مجهول باشند حل کنید.

$$(a-2)x = a^2 - 5a + 6$$

$$2x + ax = a^2 - 16$$

$$ky + 42 = k^2 - k - 6y$$

$$ay + a = a^2 + 5y - 2$$

$$ax + 2ac = a^2 + 2cx + 2c^2$$

۴- با در نظر گرفتن دبائی مانند تساوی

$$(\sqrt{5} \pm \sqrt{3})^2 = 8 \pm 2\sqrt{15}$$

که در آن $1 = 5 + 3$ ، $15 = 5 \times 3$ عبارتهای زیر را بجاصل ضرب سازد تا استخراج کند

$$5 - 2\sqrt{6}$$

$$5 + 2\sqrt{6}$$

$$7 + 2\sqrt{10}$$

$$6 + 2\sqrt{11}$$

$$1 - 2\sqrt{7}$$

$$4 + 2\sqrt{3}$$

$$22 - 12\sqrt{2}$$

$$16 - 2\sqrt{55}$$

$$6 - 4\sqrt{2}$$

۱۲۳- حل بعضی از بهیمندی ها از روی تجزیه.

مثال ۱- مطلوبست حل بجمعی
 و نظر داشت که
 $(x-2)(x+2)=0$ برای حل این بجمعی

شرط لازم و کافی برای این که حاصل ضرب چند سازه مساوی
 صفر باشد آنست که دست کم یکی از سازه ها صفر باشد (نمونه ۳۲)
 از اینجا چنین بر می آید که یا باید $x-2=0$ باشد و یا $x+2=0$ یعنی $x=2$
 و یا $x=-2$ دو عدد ۲ و -۲ ریشه های بجمعی معضه و مضه.

مثال ۲- مطلوبست حل بجمعی

$$(x-1)(2x-3) = (x-1)(2x+5)$$

اگر دو طرف بجمعی را بر $x-1$ تقسیم کنیم حاصل میشود

$$2x-3 = 2x+5$$

و یا $-3=5$ یعنی ریشه ای برای بجمعی مفروض بدست نمی آید در صورتیکه بجمعی
 را مساوی یک بگیریم دو طرف بجمعی با هم یکی میشوند یعنی ۱ ریشه بجمعی است
 برای بدست آوردن این ریشه طرف دوم را بطرف اول برده و عبارت حاصل را بجمعی
 می کنیم چنین خواهیم داشت :

$$(x-1)[2x-3-(2x+5)]=0$$

و یا $(x-1)(-8)=0$ بنا بر اصل بالا چون سازه -۸ مخالف صفر است پس
 باید $x-1=0$ باشد و از آنجا ریشه بجمعی بالا $x=1$ میباشد.

۱۲۴- تبصره مهم- نباید دو طرف همجندی را بر عبارتی شامل مجهول تقسیم کرد زیرا ممکن است یک یا چند ریشه همجندی از بین برود و بطوریکه آن عبارت شامل هیچ ریشه نباشد یعنی باز از هیچ مقدار مجهول صفر نشود

با بر این چون در دو طرف همجندی سازه مشترکی که شامل مجهول باشد به پسیم نباید آنرا بدون وقت از بین برد بلکه باید جمله را با یک طرف برده آنرا تجزیه نمود و ریشه های همجندی را به دست آورد.

$$\text{مثال - مطلوبست حل همجندی} \quad x^2 + x^2 = 4x + 4$$

پس از تجزیه دو طرف بجاصل ضرب سازه ها چنین میشود

$$x^2(x+1) = 4(x+1)$$

پسیم دو طرف دارای سازه مشترک $x+1$ است اگر جمله را با یک طرف ببریم خواهیم داشت :

$$x^2(x+1) - 4(x+1) = 0$$

$$(x+1)(x^2-4) = 0 \quad \text{و یا پس از تجزیه}$$

$$(x+1)(x+2)(x-2) = 0 \quad \text{و یا}$$

پس ریشه های همجندی بالا عبارتند از ریشه های همجندی های

$$x-2=0, \quad x+2=0, \quad x+1=0$$

یعنی $x = ۲$ ، $x = -۲$ ، $x = -۱$
 در صورتیکه اگر دو طرف را بر سازه مشترک $x + ۱$ تقسیم می‌کردیم ریشه $x = -۱$
 از بین می‌رفت.

تمرین

بهمچوئی‌های زیر را حل کنید :

$$x^2 = ۲$$

$$x^2 = ۲۱$$

$$x^2 = ۵x$$

$$۵x^2 - ۲۵x = ۰$$

$$(x-۲)^2 + x-۱ = ۰$$

$$(x-۱)^2 + (۲x+۵)(x-۱) = ۰$$

$$(۲x-۲)^2 - (۲x-۲)(x-۲) = ۰$$

$$x^2 - ۲ = ۲x + ۶$$

$$x^2 - ۵x = ۵x - ۵۵$$

$$(x-۵)^2 - (۲x-۱)(x-۵) = ۰$$

$$(۲x+۲)(x-۲x) - (x-۲x)^2 = ۰$$

$$x^2 - ۵^2 - ۵x + ۵۵ = ۰$$

$$y^2 - ۱y = ۲۵ - ۵y^2$$

$$x^2 - ۵x^2 = ۲۵x^2 - ۴۵x^2$$

فصل ششم

برخه

۱۶۵- تعریف - چنانکه میدانیم هر مقدار جبری α بر مقدار جبری β را بصورت
برخه $\frac{\alpha}{\beta}$ نویسد چنان برخه یکد برخه شمار و برخه نامش دو عبارت جبری باشد برخه جبری
نامید میشود

مثال: $\frac{-2}{1}$ و $\frac{2-x}{a-1}$ و $\frac{-a+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-x}$
نشانه برخه (که جلوی خط برخه گذارد میشود) موافق قاعده تقسیم مثبت است
اگر برخه نام و برخه شمارش دارای یک نشانه باشند و الا منفی است

$\frac{-3}{5} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$ $\frac{-5}{-7} = \frac{+5}{+7} = +\frac{5}{7}$
بکس میتوان نشانه جلوی برخه را تغییر داد بشرط این که نشانه برخه نام یا خنجر
شمار تغییر نماید

مانند

$$-\frac{x-2}{x+1} = \frac{-(x-2)}{x+1} = \frac{2-x}{x+1}$$

$$-\frac{x^2+a}{ax-1} = \frac{x^2+a}{-(ax-1)} = \frac{x^2+a}{1-ax}$$

$$\frac{2x-a}{3a-x} = -\frac{a-2x}{3a-x} = -\frac{2x-a}{x-3a}$$

پرش های ساده

نشانه جلوی هر برخه را تغییر دهید بطوریکه مقدار برخه تغییر نکند

$$\begin{array}{ccc} -\frac{x}{y} & -\frac{x}{y} & -\frac{2x}{a-b} \\ -\frac{a}{-x} & -\frac{2}{a-x} & \frac{2a}{2-2x} \\ -\frac{a-b}{2x-2} & \frac{2x-1}{2-2x} & -\frac{a-x}{a^2-b^2} \\ -\frac{2b-a}{2x-y+1} & \frac{a-2}{x^2-(a-1)} & -\frac{x^2-(1-ax)}{x^2-(a-b)^2} \end{array}$$

۱۲۶- بنا بر تعریف تقسیم اگر بر a بر a مساوی q باشد یعنی $\frac{a}{a} = q$ خواهیم داشت

$$a = bq$$

۱۲۷- در عمل نامی راجع برخه با هموار و ازین اصل استفاده می کنیم:

برگاهه برخه شمار و برخه نام را در عبارتی مخالف صفر ضرب و بر عبارتی مخالف صفر تقسیم کنیم در مقدار برخه تغییر رخ نمیدهد (از خاصیت نامی تقسیم شماره ۶۰)

مثلاً میتوان نشانه برخه نام و برخه شمار هر دو را تغییر داد بدون آنکه تغییری در مقدار برخه پیدا شود زیرا مثل اینست که برخه نام و برخه شمار در عدد ۱- ضرب یا بر آن تقسیم شده باشد

$$\frac{-4}{-5} = \frac{4}{5}$$

و

$$\frac{2}{-4} = \frac{-2}{4} \quad \text{مثلاً}$$

$$\frac{a-x}{b-x} = \frac{x-a}{x-b}$$

و

الف- ساده کردن برخه

۱۲۸- تبدیل برخه بساده ترین صورت - ساده ترین صورت یک برخه

برخه ایست که برخه شمار و برخه نامش نسبت بهم اول باشند یعنی این عبارت دارای ساز مشترک نباشند

مانند $\frac{x+1}{x^2-1}$ و $\frac{x-3}{x+4}$ و $\frac{x}{y}$ و $\frac{-3}{4}$
 و هرگاه برخه شمار و برخه نام نسبت بهم اول نباشند یعنی بر عبارتی بخش پذیر باشند می توان بوسیله تقسیم کردن آنها بر آن عبارت برخه را ساده نمود.

مثلاً در برخه $\frac{12ab}{-3ab}$ برخه شمار و برخه نامش دارای ساز مشترک ۳ab میباشد که چون آنها را بر این ساز مشترک تقسیم کنیم حاصل میشود $\frac{4}{-1}$ این برخه ساده ترین صورت برخه بالا است و همچنین در برخه $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}$ برخه شمار و برخه نامش نسبت اول نیستند زیرا از تجزیه هر یک معلوم میشود که دارای ساز مشترک $a+b$ میباشد ازینجهاد

$$\frac{a^2-b^2}{a^2+ab} = \frac{(a+b)(a-b)}{a(a+b)} = \frac{a-b}{a}$$

از اینجا قاعده زیر را برای تبدیل برخه بساده ترین صورت خود خواهیم داشت:

۱۲۹- قاعده - برای تبدیل یک برخه بساده ترین صورت خود جز
 و برخه نام را بجا حاصل ضرب سازه های اول تجزیه نموده سازه های مشترک را
 حذف میکنیم (یعنی آنها را بر این ساز مشترک تقسیم نماییم)

چنانکه برای تبدیل برخه $\frac{a^2-(b-c)^2}{an+bn-cn}$ بساده ترین صورت خود از روی قاعده
 بالا عمل میکنیم ازینجهاد:

$$\frac{a^2-(b-c)^2}{an+bn-cn} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{n(a+b-c)} = \frac{a-b+c}{n}$$

۱۳- یاد آوری- اولاً چنانکه گفتیم اگر برخه شمار و برخه نام را در عبارتی ضرب یا بر آن تقسیم کنیم مقدار برخه تغییر نمی کند ولی اگر برخه شمار و برخه نام یک عبارت مخالف صفر بنویسیم و یا از آن یک عبارت مخالف صفر کم کنیم مقدار برخه تغییر میکند.

چنانکه هرگاه از برخه شمار و برخه نام $\frac{5}{4}$ یک یک کم کنیم حاصل مساوی $\frac{4}{3}$ و یا ۲ میشود که مخالف $\frac{5}{4}$ است و نیز اگر بر آن یک یک بفرایم حاصل مساوی $\frac{6}{3}$ و یا $\frac{2}{1}$ میشود که آن نیز مخالف $\frac{5}{4}$ است

همچنین برخه $\frac{x-1}{x+1}$ ساده ترین صورت را دارد راست زیرا برخه شمار و برخه نامش نسبت بهم اولند ولی اگر از برخه شمار و برخه نام x را کم کنیم مقدار برخه مساوی $\frac{1}{1-x}$ یا $\frac{1}{x-1}$ میشود که با برخه $\frac{x-1}{x+1}$ مساوی نیست زیرا این برخه باز از مقدارهای x مقدارهای مخالف ۱- پیدا میکند.

ثانیاً باید دانست که اگر برخه شمار و برخه نام را در دو عبارت مختلف ضرب کنیم مقدار برخه تغییر میکند بخصوص اگر آنها را بتوان دوم رسانیم مقدار برخه تغییر میکند (مگر وقتی که برخه مساوی ۱ باشد)

پرسش های ساده

۱- برخه های زیر را ساده کنید.

$$\frac{10x^2}{15x^3}$$

$$\frac{-60m^2}{-90m^3}$$

$$\frac{24a^2}{11dx}$$

$$\frac{-124x^2}{120x}$$

$$\frac{24ax^2}{60dx}$$

$$\frac{2ax^2}{-26ax}$$

$$\frac{-14m^2}{60m^2n^2}$$

$$\frac{62a^2b^2c^2}{14abc^4}$$

$$\frac{d\sqrt{6}}{x\sqrt{2}}$$

مهرین

هر یک از برخه های زیر را ساده ترین صورت خود تبدیل کنید :

$$\frac{a^2+ab}{a^2-ab}$$

$$\frac{ax-a}{b-bx}$$

$$\frac{dx-d}{y-yx}$$

$$\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$$

$$\frac{x^2-4x}{(x+2)^2}$$

$$\frac{6a^2-6ab}{3(b^2-a)^2}$$

$$\frac{x^2-x}{1-x}$$

$$\frac{mx-m-x+1}{(m-1)^2}$$

$$\frac{ax+bx+cx}{ay+by+cy}$$

$$\frac{ac+bc-ad-bd}{ac-bc-ad+bd}$$

$$\frac{2ac-2ad-2bc+2bd}{2ac-2ad+2bc-2bd}$$

$$\frac{3x^2-3x-270}{3x^2-123}$$

$$\frac{(x-2)^2-a^2}{2x-6+2a}$$

$$\frac{x^2-5x+6}{2x^2-12x+18}$$

$$\frac{6ab^2-3ab^2-3ab^2}{ab^2-ab^2}$$

$$\frac{x^4-a^4}{x^4+3ax^2+2a^2}$$

ب- جمع جبری برخه ها

۱۳۱- جمع جبری برخه ها نیکه دارای یک برخه نامند- منخواهیم دو برخه

$\frac{a}{b}$ و $\frac{a'}{b'}$ که دارای یک برخه نامند با هم جمع کنیم اگر مقدار این دو برخه بترتیب q و q' باشد خواهیم داشت

$$a' = bq' \quad , \quad a = bq$$

و منخواهیم حاصل جمع $q + q'$ را بدست بیاوریم برای این کار چون دوتادوی بالا با هم جمع کنیم این تادی بدست میآید

$$a + a' = b + b'$$

$$a + a' = b + b'$$

حال برای تعیین $a + a'$ کافیت دو طرف این تساوی را بر b تقسیم کنیم

$$a + a' = \frac{a + a'}{b}$$

یعنی $a + a'$ یا حاصل جمع $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b}$ برخه ایست مساوی $\frac{a + a'}{b}$

که برخه شمارش مجموع برخه شمار a و برخه شمار a' مساوی برخه نام دو برخه مفروض باشد

بنابراین قاعده زیر را خواهیم داشت:

قاعده - مجموع جبری چند برخه که دارای یکت برخه نامند برخه ایست

که برخه نامش همان برخه نام و برخه شمارش مجموع جبری برخه شمارهای آنها باشد

$$\frac{a}{x} - \frac{2a}{x} + \frac{b}{x} = \frac{a - 2a + b}{x} = \frac{-a + b}{x}$$

مانند

$$\frac{a-b}{12} - \frac{b-a}{12} - \frac{2a-3b}{12} = \frac{a-b-(b-a)-(2a-3b)}{12} = \frac{b}{12}$$

پیش‌های ساده

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2}$$

$$\frac{2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{2} - \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{12} - \frac{2}{12}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2}$$

$$\frac{2}{2} - \frac{2}{2}$$

$$\frac{2+1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{a-2}{2} - \frac{a}{2}$$

$$\frac{a+b}{2} - \frac{c}{2}$$

$$\frac{a-n}{2x} = \frac{a+n}{2x} \quad \frac{a+n}{a+n} = \frac{n-a}{a+n}$$

$$\frac{a^2-ax}{a+x} + \frac{2ax}{a+x} \quad \frac{n^2-n^2}{n+1} + \frac{2n^2}{n+1}$$

بتصوره - بعکس میتوان برخه ای را که برخه شمارش چند جمله باشد مجموع جبری چند برخه

تبدیل نمود

$$\frac{1a-x}{12} = \frac{1a}{12} - \frac{x}{12} = \frac{2a}{2} - \frac{x}{12} \quad \text{مثال:}$$

$$\frac{ax+a^2}{ax} = \frac{ax}{ax} + \frac{a^2}{ax} = 1 + \frac{a}{x}$$

۱۳۲ - جمع جبری چند برخه که برخه نامشان یکی نباشد - برای جمع برخه که برخه نامشان مساوی نباشد باید برخه نامهای آنها را مساوی نمود (بدون اینکه تغییری در مقدار برخه حاصل شود) و مانند قاعده بالا عمل کرد.

مثال - میخواهیم دو برخه $\frac{a}{c}$ و $\frac{a}{d}$ را با هم جمع کنیم

اگر a و c هر دو را در d (برخه نام $\frac{a}{d}$) و همچنین c و d هر دو را در c (برخه نام $\frac{a}{c}$) ضرب کنیم برخه نام آنها مساوی میشود بدون اینکه تغییری در مقدار این دو برخه حاصل شود ازینقرار:

$$\frac{a}{c} = \frac{a \times d}{c \times d} = \frac{ad}{cd}$$

$$\frac{a}{d} = \frac{c \times a}{d \times c} = \frac{ca}{dc}$$

پس مجموع دو برخه $\frac{a}{c}$ و $\frac{a}{d}$ چنین میشود:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}$$

۱۳۳- قاعده کلی برای مسادی کردن برخه نامها - قاعده کلی این است

که برخه شمار و برخه نام هر برخه را در حاصل ضرب برخه نامهای دیگر ضرب کنیم درین صورت برخه نام مشترک حاصل ضرب برخه نامها میشود چنانکه اگر بخوابیم برخه های $\frac{x}{5}$ ، $\frac{a}{2}$ و $\frac{3}{y}$ را تبدیل برخه نامی کنیم که دارای یک برخه نام باشند موافق قاعده بالا بترتیب خواهیم داشت:

$$\frac{x}{5} = \frac{x \times 2y}{5 \times 2y} = \frac{2xy}{10y}$$

$$\frac{a}{2} = \frac{a \times (-5y)}{2 \times (-5y)} = \frac{-5ay}{-10y}$$

$$\frac{3}{y} = \frac{3 \times (-10)}{y \times (-10)} = \frac{-30}{-10y}$$

این قاعده کلی است ولی در حالتی مخصوصی که برخه نامها دارای سازه یا سازه های مشترک

باشند بهتر است که کوچکترین مضرب برخه نامها را بجای حاصل ضرب آنها برخه نام مشترک انتخاب

چنانکه برای برخه نام مشترک برخه های $\frac{5}{2x}$ و $\frac{y}{9x^2}$ و $\frac{3}{6x}$ بجای آنکه حاصل

ضرب برخه نامها را برخه نام مشترک قرار دهیم بهتر است که کوچکترین مضرب مشترک بین

$4x$ و $9x^2$ و $6x$ را که $36x^2$ است برخه نام مشترک بگیریم

و می بینیم که $36x^2$ مسادی حاصل ضرب $4x$ است در $9x$

$$4 \quad \cdot \quad 9x^2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$6x \quad \cdot \quad 6x \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

بنابراین برای تقسیم برخه شمارهای بر برخه باید برخه شمار اولی را در $9x$ و دومی را در 4 و سومی را در $6x$ ضرب کنیم از انقزار:

$$\frac{-5}{9x} = \frac{-5 \times 9x}{9x \times 9x} = \frac{-45x}{81x^2}$$

$$\frac{4}{9x^2} = \frac{4 \times 4}{9x^2 \times 4} = \frac{16}{36x^2}$$

$$\frac{a}{6x} = \frac{a \times 6x}{6x \times 6x} = \frac{6ax}{36x^2}$$

۱۳۴- کوچکترین مضرب مشترک بین چند عبارت جبری - کوچکترین مضرب بین چند عبارت جبری ساده ترین عبارتست که بر آنها بخش پذیر باشد و برای این آن باید هر یک از عبارت های مفروض را با حاصل مضرب سازه های اول تجزیه نمود - کوچکترین مضرب مشترک بین عبارت های مفروض مساویست با حاصل مضرب تمام سازه های اول با نمای بزرگتر.

مثال ۱- کوچکترین مضرب مشترک بین mx^2 و x^2 مساوی mx^2 است

و همچنین $4nx$ و $6ax$ و $12anx^2$ مساوی $12anx^2$ است

مثال ۲- میخواهیم بین $ax^2 - 9a$ و $x^2 - 5x + 6$ و $x^2 - 4x + 4$

کوچکترین مضرب مشترک بگیریم
بترتیب خواهیم داشت:

$$ax^2 - 9a = a(x+3)(x-3)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

بنابر این کوچکترین مضرب مشترک این سه عبارت این است

$$a(x-2)(x+2)(x-2)^2$$

تمرین

مطلوبست تعیین کوچکترین مضرب مشترک بین عبارتهای زیر:

$$a, b, a+b$$

$$x, ax, a+x$$

همچنین

$$x+2, 2x+6$$

$$ax + a^2, x+a$$

$$x^2 - a^2, a+x$$

$$x^2 - 4, 6 + 2x, x-2$$

$$x-2, x^2-9, x^2-5x+6$$

$$x^2-25, x^2-6x+5, x+5$$

$$4a^2-1, 2a+1, a$$

$$x-3 + \frac{5x}{2x-6}$$

را بدست آورید

مثال ۱- حاصل عبارت

این عبارت را میتوان چنین نوشت :

$$\frac{x-3}{1} + \frac{5x}{2(x-3)}$$

کوچکترین مضرب بر خه نامها $2(x-2)$ است بنابراین حاصل عبارت بالا چنین است

$$\frac{2(x-2)^2 + 5x}{2(x-2)} = \frac{2x^2 - 7x + 11}{2(x-2)}$$

مثال ۲- حاصل عبارت $\frac{x+1}{2x-2} - \frac{x-1}{2x+2} + \frac{4x}{1-x^2}$ را بدست

آورید

بر خه نامها را با حاصل ضرب سازه های اول تجزیه میکنیم:

$$\frac{x+1}{2(x-1)} - \frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{4x}{(1-x)(1+x)}$$

کوچکترین مضرب مشترک بر خه نامها $2(x-1)(x+1)$ است بنابراین حاصل عبارت

$$\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2 - 4x}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{1-x^2}$$

بالا چنین میشود

تمرین

حاصل عبارت های زیر را بدست آورید:

$$\frac{x^2 + n^2}{2x - n} + 2x + n$$

$$x^2 + x + 1 - \frac{x^2 + 2}{x-1}$$

$$\frac{2a}{2+a} - \frac{a}{a-2} + \frac{1}{a^2-4}$$

$$x+y^2 - \frac{x^2+y^2}{x+y} - xy$$

$$x^2 + x - \frac{x^2 + 3x^2 + 1}{x^2 - x + 1} + 1$$

$$\frac{2-x}{1-2x} - \frac{2+x}{1+2x} - \frac{1-6x}{4x^2-1}$$

$$2a+2 - \frac{4}{a-2} - (a+1 - \frac{3a^2}{a+4})$$

$$y - 2 - \frac{2y}{y+2} - (y+2 + \frac{2y}{y+2})$$

$$ax+a - \frac{a}{x+1} - (ax-a - \frac{x}{x-1})$$

درس مثال بالا بهترین است که اول پرانش را ازین برده جمله های متشابه را جمع کنیم پس از آن مجموع جبری
برخه با پر داریم.

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

کوچکترین برخه نام مشترک را میتوان مساوی $(a-b)(b-c)(c-a)$ گرفت.

$$\frac{y+z}{(x-y)(x-z)} + \frac{x+z}{(y-x)(y-z)} + \frac{x+y}{(z-x)(z-y)}$$

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$\frac{bc}{(a-c)(a-b)} - \frac{ac}{(b-c)(a-b)} - \frac{ab}{(c-a)(b-c)}$$

۷- ضرب برخه ها

۱۳۵- میخواهیم حاصل ضرب برخه $\frac{a}{b}$ را در برخه $\frac{a'}{b'}$ بدست بیاوریم.

اگر $\frac{a}{b}$ را q و $\frac{a'}{b'}$ را q' بنامیم خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{و} \quad \frac{a'}{b'} = q'$$

دما میخواهیم حاصل ضرب qq' را بدست آوریم. از دو تساوی لایچنین برمیآید:

$$a = bq$$

$$a' = b'q'$$

اگر دو طرف این دو تساوی را در یکدیگر ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$aa' = 6699$$

برای دست آوردن ۹۹ و طرفین آن وی را بر ۹۹ تقسیم میکنیم:

$$99 = \frac{6699}{67}$$

یعنی ۹۹ که حاصل ضرب دو بر خه $\frac{66}{67}$ و $\frac{99}{67}$ میباشد برخایست که بر خه شمار حاصل ضرب بر خه شمار $(a \text{ و } a')$ و بر خه نامش حاصل ضرب بر خه نامها $(b \text{ و } b')$ باشد.

$$\text{مثال} \quad \frac{2x}{x-y} \times \frac{x^2-y^2}{1} = \frac{2x(x-y)(x+y)}{1(x-y)} = \frac{x(x+y)}{1}$$

$$\frac{x^2+a^2}{x} \times \frac{x^2}{x^2-a^2} = \frac{x^2(x^2+a^2)}{x(x^2-a^2)} = \frac{x^2}{x^2-a^2}$$

۱۳- تبصره - چون عبارت درست را میتوان ب شکل بر خه ای نوشت

که بر خه شمارش همان عبارت و بر خه نامش یک باشد بنا بر این برای ضرب یک عبارت درست در یک بر خه آن عبارت را در بر خه شمار آن بر خه ضرب میکنیم.

$$\text{مثال:} \quad -2 \times \frac{a}{x} = \frac{-2}{1} \times \frac{a}{x} = \frac{-2a}{x}$$

$$(x-1) \times \frac{2}{x+1} = \frac{2(x-1)}{x+1}$$

نتیجه ۱- هرگاه بر خه شمار یک بر خه در عبارت ضرب شود مقدار آن بر خه دآن

عبارت ضرب میشود.

نتیجه ۲- از آنچه گفتیم معلوم میشود که حاصل ضرب $\frac{a}{x} \times x$ را میتوان $\frac{ax}{x}$

نوشت حال اگر بر خه نام و بر خه شمار $\frac{ax}{x}$ را بر x تقسیم کنیم (بفرض $x \neq 0$)

خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} \times x = \frac{ax}{b} = \frac{a}{\frac{b}{x}}$$

یعنی برای ضرب $\frac{a}{b}$ در x می‌توان برخه‌ناش را بر x تقسیم نمود.

مثال:

$$\frac{a+x}{1x^2} \times 2x = \frac{a+x}{\frac{1x^2}{2x}} = \frac{a+x}{\frac{1}{2}x}$$

$$\frac{1}{y^2-x^2} \times (x+y) = \frac{1}{\frac{y^2-x^2}{x+y}} = \frac{1}{y-x}$$

۱۳۷- توان یک برخه - چون توان حالت مخصوصی است از ضرب پس توان

m ام یک برخه برخه‌ایست که برخه‌شمارش توان m ام برخه‌شمار آن برخه‌نبود.

برخه‌ناش توان m ام برخه‌نام آن باشد یعنی:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

مثال:

$$\left(\frac{a-1}{2x}\right)^2 = \frac{(a-1)^2}{4x^2}$$

$$\left(\frac{-1}{x-1}\right)^3 = \frac{-1}{(x-1)^3}$$

پرشش‌های ساده

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$-\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$\frac{5}{6} \times \frac{11}{15}$$

$$-2 \times \left(-\frac{4}{9}\right)^2$$

$$\frac{1}{a} \times \frac{1}{x}$$

$$\frac{a}{2x} \times \frac{x}{a}$$

$$\frac{a^2}{n^2} \times \left(-\frac{2n}{a}\right)$$

$$-2ax \times \left(-\frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{a^2}{n^2} \times \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

$$\frac{a^2-x^2}{a} \times \frac{a}{a+x}$$

$$\frac{a^2-4}{2x} \times \frac{6x}{a-2}$$

$$\frac{2x+n}{nx} \times \frac{nx^2}{3x-n}$$

$$\left(\frac{a+x}{a}\right)^2 \times a^2$$

$$\left(\frac{n}{a+n}\right)^2 (a+n)$$

$$\frac{n^2-9}{3x^2} \times \frac{x}{n-3}$$

$$\frac{y-x}{a^2-b^2} \times \frac{a+b}{x-y}$$

مقرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\left(\frac{yax}{bn}\right)^2 \times \frac{10n}{4ax}$$

$$\frac{5ax}{2n^2} \times \frac{6nx}{10a^2} \times \frac{n^2a}{x^2}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 \times \frac{dx}{n^2} \times \frac{bn^2}{ax}$$

$$\frac{x}{pn^2} \cdot \left(\frac{n}{2x}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{2y}{3bx}\right)^2 \times \frac{12b^3}{16cyx^2} \times 1cx^3$$

$$\left(\frac{1}{p}\right)^2 \left(\frac{2x}{n}\right)^2 \left(\frac{2n}{x}\right)^2$$

$$\frac{x^2}{(2x)^2} \times \left(-\frac{2a}{x}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\frac{6n}{x} \cdot \left(-\frac{2x}{3n}\right)^2 \left(\frac{9n^2}{4x}\right)^2$$

$$\frac{n+2}{n-2} \times \frac{n^2-4n+2}{n^2-4}$$

$$\frac{a+x}{a-x} \times \frac{a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2}$$

$$\frac{n^2-4}{n+2} \times \frac{2n+6}{3n-6}$$

$$\frac{x+7}{x^2-25} \times \frac{2x-15}{ax+7a}$$

$$\frac{2x-12}{ax+2a} \times \frac{dx+2a}{nx-4n}$$

$$\frac{5a+5c}{an-cn} \times \frac{an^2-cn^2}{a^2+ac}$$

$$\frac{2n^2+6}{5x^2} \times \frac{10x^2}{3n^2+9}$$

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-3} \times \frac{x+2}{x-3}$$

$$\frac{x^2-16}{2x^2-18} \times \frac{x^2+x-6}{x^2+x-2}$$

۱۳۸ - حل همچنینای برخه - مثال - مطلوبست حل همچنینی

$$(1) \quad \frac{5x-1}{3x+2} - \frac{3x+2}{2(x-1)} = \frac{x^2-20x+2}{6x^2-6}$$

برخه طرف دوم را بطرف اول میآوریم و مجموع طرف اول را حساب میکنیم کوچکترین

برخه نام مشترك (x^2-1) است پس خواهیم داشت:

$$(2) \quad \frac{2(x-1)(5x-1) - 3(x+1)(3x+2) - (x^2-20x+2)}{6(x^2-1)} = 0$$

یعنی هر برخه شمار برخه نام $(1-x^2)$ مساوی صفر است بنا بر این لازم است
(شماره ۵۲) که برخه شمار مساوی صفر باشد یعنی:

$$2(x-1)(5x-1) - 3(x+1)(3x+2) - (x^2 - 30x + 2) = 0$$

و بپس از ساده کردن $x=2$

تبصره - چنانکه دیده میشود پس از اینکه بهجندی (۱) بصورت بهجندی (۲) درآمد
برای حل آن کافی است تنها برخه شمارش را مساوی صفر قرار دهیم و چون این برخه شمار
از ضرب کردن دو طرف بهجندی (۱) در برخه نام مشترک بدست آمده پس کافی است برای
آسانی از اول (پس از ساده کردن برخه نام) دو طرف بهجندی را در کوچکترین برخه نام مشترک
ضرب کنیم بدون اینکه آن برخه نام مشترک را بنویسیم.
مثال - مطلوبست حل بهجندی

$$\frac{2x-1}{2(x-3)} = \frac{3(x-2)}{3x-1}$$

و دو طرف را در $(2x-1)(3x-1)$ که کوچکترین برخه نام مشترکست ضرب میکنیم
خواهیم داشت:

$$(2x-1)(3x-1) = 3(x-2) \cdot 2(x-3)$$

که پس از ساده کردن جواب بهجندی $x = \frac{7}{5}$ است

تمرین

و یا آنکه برخه نام بی اندازه بزرگتر از برخه شمار گردد که ما درین جا بدان منسپه داریم

این هم چند بار اِخل کنید:

$$\frac{2(2x-2)}{2(2x-2)} = \frac{12}{9}$$

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{4-x}{5-x}$$

$$\frac{2x^2-1}{2x-1} = \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\frac{4-2x}{2} - \frac{4}{6x-2} = \frac{1/5x}{x-1/5} - \frac{4x^2}{2(2x-1)}$$

$$\frac{2x-1}{2x-6} + \frac{5x-7}{2x-9} + \frac{7x+1}{4x-12} = 11$$

$$\frac{2x-5}{5x-5} + \frac{5x-1}{7x-7} + \frac{x-4}{x-1} = 2$$

$$\frac{4x^2-x}{1+x} - \frac{2x}{1-x} = \frac{4x^3+2x}{x^2-1}$$

مثال - مطلوبست حل بجمندی

$$\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x-5} = \frac{5}{x-2} - \frac{1}{x-6}$$

دو طرف را در کوچکترین مضرب بر خانا مضرب میکنیم حاصل میشود:

$$1(x-5)(x-2)(x-6) - 4(x-3)(x-2)(x-6) =$$

$$5(x-3)(x-5)(x-6) - (x-3)(x-5)(x-2)$$

در طرف اول $4(x-2)(x-6)$ و در طرف دوم $5(x-3)(x-5)$

مشترک است بنا بر این خواهیم داشت

$$4(x-2)(x-6) [2(x-5) - (x-3)] =$$

$$(x-3)(x-5) [5(x-6) - (x-2)]$$

و پس از ساده کردن

$$4(x-2)(x-6)(x-7) = 4(x-3)(x-5)(x-7)$$

حرف دوم را بطرف اول میسریم و چون من آنه (۷-۲) ۴ سازه مشترک است پس
خواهیم داشت:

$$۴(x-۲) \left[(x-۲)(x-۶) - (x-۳)(x-۵) \right] = ۰$$

$$(x-۲)(x^2 - ۸x + ۱۲ - x^2 + ۸x - ۱۵) = ۰ \quad \text{و یا}$$

$$x=۲ \quad \text{و از آنجا} \quad -۳(x-۲) = ۰ \quad \text{و یا}$$

تمرین

بمجموعه های زیر ارجح کنید:

$$\frac{۹}{x-۷} - \frac{۵}{x-۱} = \frac{۹}{x-۲} - \frac{۵}{x+۱}$$

$$\frac{۲}{x-۱۴} - \frac{۵}{x-۳} = \frac{۲}{x-۹} - \frac{۵}{x-۱۱}$$

$$\frac{۵}{x-۶} + \frac{۴}{x-۹} = \frac{۸}{x-۷} + \frac{۱}{x-۱۰}$$

$$\frac{۷}{x-۶} + \frac{۳}{x-۱۱} = \frac{۹}{x-۷} + \frac{۱}{x-۱۲}$$

$$\frac{x-۵}{x-۶} - \frac{x-۶}{x-۷} = \frac{x-۱}{x-۲} - \frac{x-۲}{x-۳}$$

$$\frac{z+۱}{z+۹} + \frac{z+۴}{z+۵} = \frac{z+۹}{z+۱۰} + \frac{z+۲}{z+۴}$$

$$\frac{a-۲}{a-۳} + \frac{a-۳}{a-۴} = \frac{a-۱}{a-۲} + \frac{a-۴}{a-۵}$$

$$\frac{y}{y-۳} + \frac{۹-y}{y-۴} = \frac{y+۱}{y-۲} + \frac{۸-y}{y-۵}$$

$$\frac{۲۵-۲۷}{a-۱۳} + \frac{a-۷}{a-۸} = \frac{a-۱۲}{a-۱۲} + \frac{۲a-۱۷}{a-۹}$$

۱- تقسیم بر خه ها

۱۳۹- میخواهیم هر برده $\frac{a}{b}$ را بر برده $\frac{a'}{b'}$ بدست بیاوریم. اگر مانند پیش این دو برده را بر ترتیب q و q' بنامیم میخواهیم $\frac{q}{q'}$ را بدست بیاوریم. اگر دو طرف دو تساوی $a = bq$ و $a' = b'q'$ را بر هم تقسیم کنیم خواهیم داشت

$$\frac{a}{a'} = \frac{bq}{b'q'}$$

برای بدست آوردن $\frac{q}{q'}$ دو طرف تساوی بالا را در برده $\frac{b'}{b}$ ضرب میکنیم بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{q}{q'} = \frac{ab'}{ab} = \frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'}$$

یعنی: بهر دو برده مساویست با حاصل ضرب برده بخشی در وارونه برده بخش یاب.

مثال:

$$\frac{2}{3x} : \frac{1}{x^2} = \frac{2}{3x} \times \frac{x^2}{1} = \frac{x}{12}$$

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{1}{1} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$$

و یا

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{b} : \frac{x}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{x} = \frac{a}{bx}$$

توضیح- از مثال آخر چنین بر میآید که هرگاه برده نام در عبارتی ضرب شود مقدار

آن برده بر آن عبارت تقسیم میشود و بعکس. حال اگر در همین مثال برده شمار و برده نام $\frac{a}{bx}$ را بر x تقسیم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{a}{b} : x = \frac{a}{bx} = \frac{\frac{a}{x}}{b}$$

یعنی: برای تقسیم کردن یک برده بر یک عبارت میتوان برده شمار آن برده را بر آن عبارت تقسیم نمود.

$$\frac{x^2-1}{a} : (x+1) = \frac{\frac{x^2-1}{x+1}}{a} = \frac{x-1}{a}$$

مانده

تمرین

حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید:

$$\frac{-5}{51} : \frac{10}{-17} \quad ; \quad \frac{22}{39} : \frac{-115}{26} \quad ; \quad -\frac{4}{5} : \frac{2}{3}$$

$$\frac{3ab}{x} : \frac{ac}{4nx} \quad ; \quad \frac{a^2}{n} : \frac{2a}{n^2} \quad ; \quad \left(\frac{2an}{x}\right)^2 : \frac{6an^2}{9x^2}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{x}{n} : \frac{an^2}{bx^2}$$

(درین مثال و مانند آن قرار میگذاریم که ابداء خارج قسمت دو برزخه اول را بدست آورده پس انباء آن حاصل را بر برزخه سوم تقسیم کنیم)

$$\frac{2an}{4bx} : \frac{6an^2}{5bx^2} : \frac{10an^2}{1cx}$$

$$\frac{15}{4n^2} : \frac{5a}{2n^2} : \frac{(3n^2)^2}{12a^2}$$

$$\frac{12xy^2}{10x^2} : \frac{6y}{5x} : \frac{4ax}{3by^2}$$

$$\frac{(4n^2)^2}{12} : \left(-\frac{2}{n}\right)^2 : \frac{(2n)^2}{-6}$$

$$\frac{10ab^2}{-21a^2} : \frac{5b}{3a^2} : -14a^2b$$

$$-\left(-\frac{2a}{3x}\right)^2 : -\left(-\frac{2a}{4x^2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{a}{x}\right)$$

$$\frac{24xy}{-12} \cdot \left(-\frac{y}{4x}\right)^2 : -\frac{(2xy)^2}{2a^2}$$

$$\frac{(10n^2)^2}{256} : \left(\frac{5n^2}{-4}\right)^2 : \frac{5n^2}{(12n^2)^2}$$

$$-\frac{a^2}{b} : \left(-\frac{x}{b}\right)^2 : \left(-\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{b}\right)^2$$

و $(\cdot \cdot = 210)$

$$\frac{2n-1}{15ax^2} : \frac{4n-2}{5x}$$

$$\frac{1-x^2}{x^2-16} : \frac{x-1}{x^2-7x+12}$$

$$\frac{n^3-n^2-12n}{n^2-4n+4} : \frac{3n^2+n^3}{4-n^2}$$

هـ - مثال های ترکیبی

مثال ۱ - حاصل عبارت $(3 - \frac{1}{n+2}) : (3 - \frac{4}{n+3})$ را بدست

آورید

اول حاصل هر پرانتز را پیدا میکنیم ازینقرار:

$$3 - \frac{1}{n+2} = \frac{3n+6-1}{n+2} = \frac{3n+5}{n+2}$$

$$3 - \frac{4}{n+3} = \frac{3n+9-4}{n+3} = \frac{3n+5}{n+3}$$

پس از آن این دو حاصل را برهم تقسیم مینماییم:

$$\frac{3n+5}{n+2} : \frac{3n+5}{n+3} = \frac{3n+5}{n+2} \times \frac{n+3}{3n+5} = \frac{n+3}{n+2}$$

مترین

دو حاصل عبارت های زیر را بدست آورید:

$$(x + \frac{n^2}{n+x}) : (\frac{2nx+x^2}{n+x} - n)$$

$$(x-2 - \frac{21}{x}) : (1 - \frac{1}{x} - \frac{20}{x^2})$$

$$(n - \frac{3}{4n} + 1) : \frac{2n+3}{2n+1} (\frac{3}{4n^2-1} + 2)$$

$$\frac{2x-6}{x+2} : (3 + \frac{45}{4x^2-16}) (\frac{7}{x-3} + 2)$$

$$\left[\left(\frac{a}{n} - \frac{n}{a} \right) : \frac{a+n}{2a^2-2an} \right] \cdot \frac{nx}{2(a-n^2)}$$

$$\frac{9n^2+9n}{9n^2-9} : \frac{n+1}{3n-2} \left(2n+2 + \frac{1}{3n} \right)$$

$$\frac{4-4n^2}{9n^2-25n^2} : \frac{2n^2+2}{2n-5} \left(2n^2 + \frac{1n^2-n^2}{n-1} \right)$$

$$(2n^2-25n) : \left(2 + \frac{11}{n} + \frac{5}{n^2} \right) \left(2n-11 - \frac{1}{n} \right)$$

$$\left(\frac{-6a}{a^2-4} + \frac{3}{2-a} \right) : \frac{2}{a^2-a-2}$$

$$\left(4 - \frac{4}{a+1} \right) : \left(1 - \frac{4a-1}{a^2-1} \right)$$

$$\left(\frac{2x}{x-2} - \frac{x}{x-1} \right) : \left(\frac{2x}{x-2} - \frac{2x}{x-2} \right)$$

$$\left(\frac{1}{m-x} - \frac{4}{x^2-m^2} \right) : \left(\frac{1}{m-x} - \frac{1}{m+x} \right)$$

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}$$

مثال ۲- عبارت

ساده کنید

از تقسیم حاصل $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \right)$ بر حاصل $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right)$

نتیجه بدست میآید.

همین میتوان برای سادگی در عمل برخه شمار و برخه نام عبارت بالا را در کوچکترین مضرب

برخه نامهای جزء که مساوی $(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ است ضرب نمود تا چنین

شود:

$$\frac{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}{(a+b)^2(a^2+b^2) - (a-b)^2(a^2+b^2)}$$

که پس از تجزیه بجاصل ضرب سازه ما و بنا بر شماره (۱۱۳) چنین میشود

$$\frac{4ab^2}{(a^2+b^2) \cdot 4ab} = \frac{ab}{a^2+b^2}$$

و یا

یعنی عبارت داده شده منتهی است با $\frac{ab}{a^2+b^2}$

مثال ۲- حاصل این عبارت را بدست آورید

برخه شمار و برخه نام این برخه را در xy کوچکترین مضرب برخه نامهای جز ضرب میکنیم بنا بر این خواهیم داشت :

$$\frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{x^2 - y^2}{y\sqrt{x} - x\sqrt{y}}$$

مقرین

۱- حاصل عبارت نامی زیر را بدست آورید :

$$\frac{\frac{7}{3} - 1}{\frac{4}{3} + 1}$$

$$\frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{5}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{5}}$$

$$\frac{\frac{5}{6} + \frac{2}{4} + \frac{1}{3}}{\frac{11}{12} - \frac{7}{4} - \frac{2}{3}}$$

$$\frac{\frac{6}{x} - 5 + x}{\frac{1}{2} + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}$$

$$\frac{x - 3 - \frac{20}{x-2}}{x - 1 - \frac{20}{x-2}}$$

$$\frac{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}}{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}}$$

$$\frac{1 - \frac{a^r}{b^r}}{\frac{1}{b^r} - \frac{a}{b^r}}$$

$$\frac{1}{r - \frac{r}{x + \frac{x}{1-x}}}$$

$$r + \frac{1}{a + \frac{1}{r + \frac{1}{r}}}$$

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{a}}$$

$$a - \frac{a - rb}{r - \frac{a+b}{a-b}}$$

$$x - \frac{y}{1 + \frac{1}{1 + \frac{y}{x}}}$$

$$\frac{\frac{r}{b+c} - \frac{1}{b}}{c + \frac{bc}{c-rb}} + \frac{\frac{r}{b+c} - \frac{1}{c}}{b + \frac{bc}{b-rc}}$$

$$\frac{\frac{r y z}{y+z} - y}{\frac{1}{z} + \frac{1}{y-rz}} + \frac{\frac{r y z}{y+z} - z}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z-ry}}$$

$$\frac{x^r + y^r}{y - \frac{x}{1 + \frac{x}{y-x}}} - \frac{y^r - x^r}{y + \frac{x}{1 - \frac{x}{x+y}}}$$

$$\frac{a+r - \frac{1}{a+r}}{a+r - \frac{r}{a+d}} : \frac{a+r - \frac{1}{a+r}}{a+r + \frac{1}{a+r}}$$

$$\left(\frac{d + r\sqrt{r}}{r - \sqrt{r}} \right)^r \cdot \left(\frac{r - \sqrt{r}}{\sqrt{r} + 1} \right)^r$$

$$\frac{m'n - mn'}{a'b' - ab'} : \frac{m'n' - mn}{a'b - ab}$$

$$\frac{(ra+r-\frac{r}{ra})\frac{ra-r}{a-1}}{\frac{ra^2-r}{ra+ra}}$$

$$\frac{1 + \frac{y^2+z^2-x^2}{rxyz}}{1 - \frac{x^2+y-z^2}{rxy}}$$

$$\frac{\frac{x}{1+\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{x}{1-\frac{1}{x}} - x - \frac{1}{x-1}}$$

$$\left(\frac{\frac{x}{y}+r}{\frac{x}{y}+1} + \frac{x}{y}\right) : \left(\frac{x}{y}+r - \frac{\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}+1}\right)$$

$$\frac{\frac{1-b}{1+b} - \frac{1-a}{1+a}}{1 + \frac{(1-a)(1-b)}{(1+a)(1+b)}} : \frac{1+ab}{a-b}$$

$$\frac{(1+\frac{1}{x})(1-\frac{1}{x})^r}{x-\frac{1}{x}} : \frac{1}{1+x}$$

$$\left(r - \frac{rn}{m} + \frac{rn'-rm'}{m'+r mn}\right) : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m-rn - \frac{rn'}{m+n}}\right)$$

۲- مقیاس نقشه ای $\frac{1}{80000}$ است یعنی هر ۸۰ کیلومتر در نقشه یک متر نمایش داده میشود حال اگر فاصله دو شهر α کیلومتر باشد درین نقشه چقدر فاصله خواهند داشت ؟ و بعکس اگر فاصله دو شهر درین نقشه ۳ میلی متر باشد حقیقتاً فاصله این دو شهر چقدر است ؟ (حالت مخصوص $\alpha = ۱۶۰$ و $\alpha = ۵$)

۳- $\frac{1}{4}$ پارچهای α ریال ارزش دارد تعیین کنید ارزش $\frac{5}{8}$ آنرا (حالت مخصوص $\alpha = ۱۲۰$)

۴- دو کارگر کاری را در α روز انجام میدهند اولی به تنهایی آنرا در β روز تمام میکند معلوم کنید کارگر دوم به تنهایی در یک روز چقدر کار را تمام میکند ؟ (حالت مخصوص $\alpha = ۱۲$ و $\beta = ۱۸$)

۵- فاصله دو شهر α کیلومتر است تری این فاصله را با تندی متوسط ۴ کیلومتر در ساعت می پاید اگر فرض کنیم ماشین در دوراهی بین دو شهر مدت نیم ساعت توقف کند پس از چه مدتی از شهر اول بشهر دوم میرسد ؟

۶- تندی متوسط ماشین در پیمودن راهی α کیلومتر در ساعت است یک قسمت این راه را با تندی β کیلومتر در ساعت پیموده حساب کنید تندی ماشین را در بقیه راه .

۷- یک بسته پوایما باید در ساعت ۱۷ بر فراز شهری که بنا فاصله α کیلومتر است آشکار شوند

اگر تندی متوسط آنها α کیلومتر در ساعت باشد چه ساعتی باید حرکت کنند ؟ (حالت مخصوص $\alpha = ۷۰۰$)

۵
۸- در مسئله پیش فرض میکنیم کیلومتر $\alpha = 600$ و کیلومتر ساعت $\beta = 200$ باشد
اگر هوا منقلب بوده و باد مخالفی به تند α کیلومتر در ساعت بوزد چند دقیقه زودتر باید حرکت
کنند تا در موقع مقرر بشهر منظور برسند؟

۹- شخصی α ریال بدبکار است $\frac{1}{4}$ بدبی خود را میسر و از دستش از دستش میجویشود که
مبلغی مساوی $\frac{1}{5}$ آنچه که بدبکار است قرض کند معلوم کنید بدبی او چه مبلغ میشود و در مجموع این
دو عمل چه مبلغی از بدبی خود را ادا کرده است؟ (حالت مخصوص $\alpha = 150$)

۱۰- بنائی میتواند به تنهایی کاری را در α روزه بسازد بنائی دیگر به تنهایی همان کار را در β
روزه تحویل میدهد پس از اینکه بنائی دوم یک روز کار کرد هر دو را با این کارمکاریم ساختمان کار را
چند روزه تمام میشود؟ (حالت مخصوص $\alpha = 4$ و $\beta = 6$)

۱۱- بنا بدستور مهندس ساختمان α متر مقلب مخلوط ماسه و سیمان به نسبت $\frac{1}{4}$ تهیه شده
(یعنی در سه قسمت مخلوط یک قسمت سیمان و دو قسمت ماسه میباشد) اتفاقاً مهندس تعمیر را می داد میخوا
به نسبت $\frac{1}{5}$ باشد چه مقدار ماسه باید به مخلوط افزوده شود؟ (حالت مخصوص $\alpha = 2$)

۱۲- در استیگاه بنزین فروشی برای پر کردن مخزن بنزینی دو دهنه از لوله موجود است اولی مخزن
به تنهایی در سه ربع ساعت پر میکند و برای مواقع عادی است دومی آنرا در یک ساعت و ربع پر میکند و بدکاست
در روز سوم اسفند که مصرف بنزین زیاد است میخواهند هر دو دهنه را با کار بر بند معلوم کنید پر کردن مخزن

چه اندازه طول خواهد کشید؟
بخانه هندسی

آخری درج شدہ تاریخ پر یہ کتاب مستعار
 لی گئی تھی مقررہ مدت سے زیادہ رکھنے کی
 صورت میں ایک آنہ بمیہ دیرانہ لیا جائیگا۔
